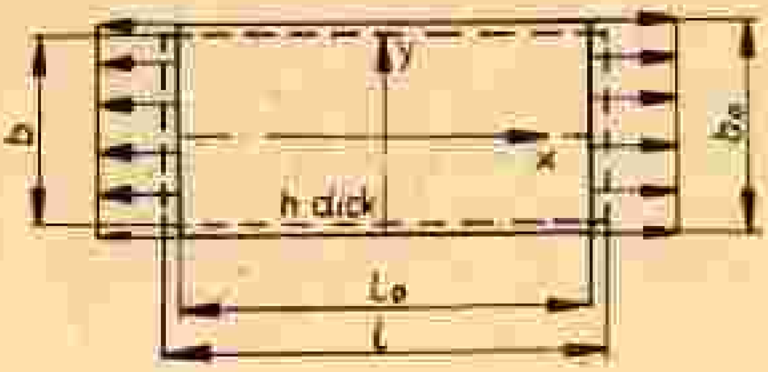
$\boxed{1.1.}$



Geg.:

$F_z = 6 \cdot 10^3 N$

$h = 1 mm$

$b_0 = 30{,}012 mm$

$L_0 = 100{,}210 mm$

$b = 29{,}971 mm$

$L = 100{,}660 mm$

Ges.: E in $[N mm^{-2}]$

ν

<u>Lösung:</u>

1) $\sigma_x = \frac{F_z}{A} = 200 \, N mm^{-2}$

$\varepsilon_x = \frac{L - L_0}{L_0} = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon_y = \frac{b - b_0}{b_0} = -1{,}37 \cdot 10^{-3}$

$\sigma_x = E \varepsilon_x$

$\underline{\underline{E = 4{,}4 \cdot 10^4 \, N mm^{-2}}}$

2) $\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \underline{0{,}3}$

$\boxed{1.2.}$

Geg.: $L = 20 mm$

$\left.\begin{array}{l} a = 36{,}3 mm \\ b = 24{,}6 mm \end{array}\right\}$ durch Versuch ermittelt

Ges.: ν

$\boxed{1.2.}$

Lösung:

Diagonalen im unbelasteten Zustand: $a_0 = b_0 = L\sqrt{2} = 28{,}3\,mm$

$$\varepsilon_x = \frac{a - a_0}{a_0} \qquad \nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{b - b_0}{b_0} \qquad \underline{\nu = 0{,}46}$$

$\boxed{1.3.}$

Zwei an einem Träger angebrachte Dehnmeßinstrumente werden abgelesen

Geg.: $E = 70{,}6 \cdot 10^3\ N/mm^2$,

$\varepsilon_o = -0{,}7\,‰$, $\varepsilon_u = 2{,}8\,‰$.

Ges.: 1. Unter welchen Bedingungen sind die gegebenen Werte zur Berechnung der Spannungen ausreichend?

2. Wie groß sind die Spannungen?

Lösung:

zu 1.: – Einachsiger Spannungszustand (ν nicht gegeben)

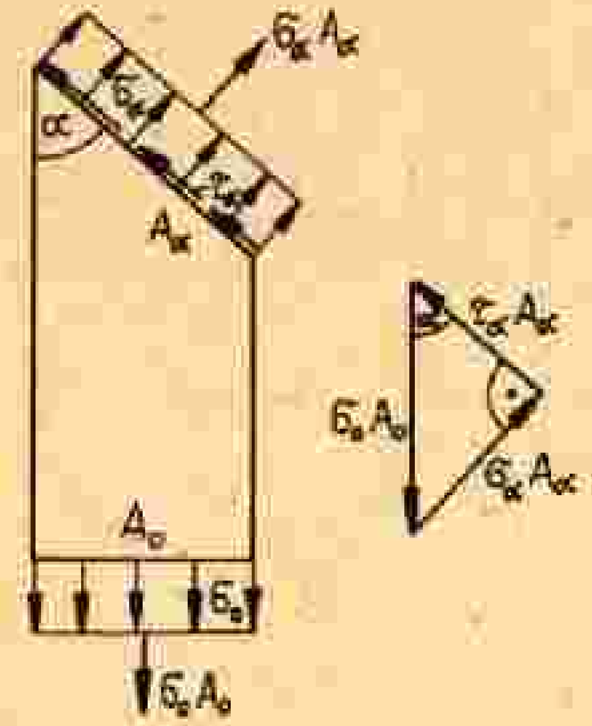
– keine Temperaturdehnung (α_{th}, ΔT nicht gegeben)

– linear elastisches Materialverhalten

zu 2.: $\sigma_{zo} = E \cdot \varepsilon_{zo} = \underline{-49{,}4\ N/mm^2}$

$\sigma_{zu} = E \cdot \varepsilon_{zu} = \underline{+197{,}7\ N/mm^2}$

$\boxed{1.4.}$



Geg.: σ_0 $[N\,mm^{-2}]$

$\alpha = 60°$

Ges.: Normalspannung u. Schubspannung in der Naht (graf. u. analyt.)

Lösung: analytisch

$$A_\alpha = \frac{A_0}{\sin\alpha}$$

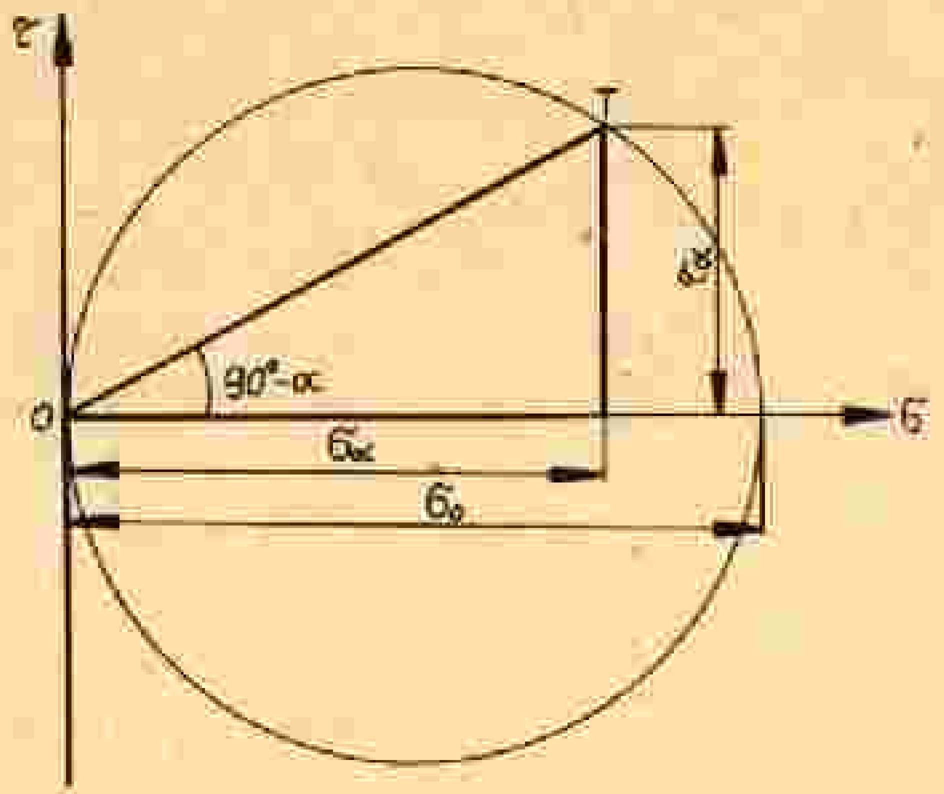
$$\sigma_\alpha A_\alpha = \sigma_0 A_0 \sin\alpha$$

$$\tau_\alpha A_\alpha = \sigma_0 A_0 \cos\alpha$$

$$\underline{\sigma_\alpha = \sigma_0 \sin^2\alpha = \sigma_0 \cdot \tfrac{3}{4}}$$

$$\underline{\tau_\alpha = \sigma_0 \sin\alpha \cos\alpha = \sigma_0 \tfrac{\sqrt{3}}{4}}$$

$\boxed{1.4}$ grafisch: MOHRscher Spannungskreis LB S. 107



$\boxed{1.5}$ Geg.: a) $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$; $\sigma_3 = 0$

b) $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$

Ges.: Größe und Richtung der maximalen Schubspannung

Die 3 Hauptschubspannungen lauten:

$\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$

$\tau_2 = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$

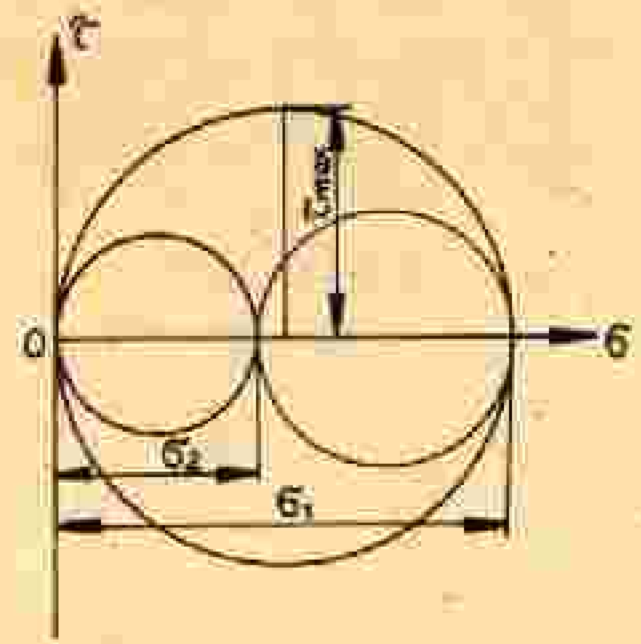
$\tau_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$

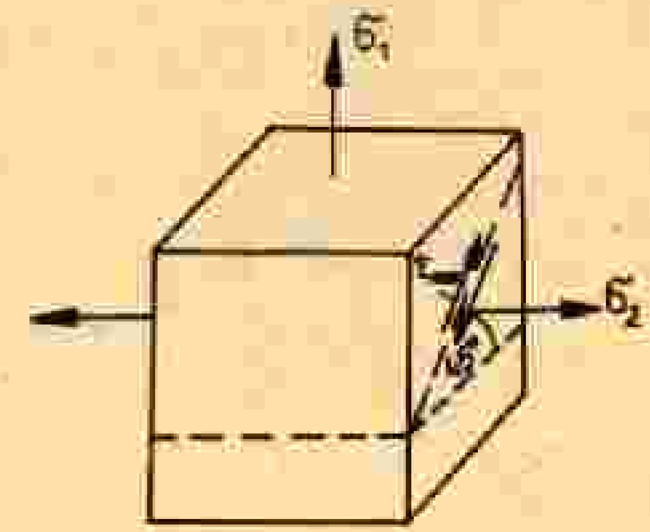
Nur wenn gilt: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ist

$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$

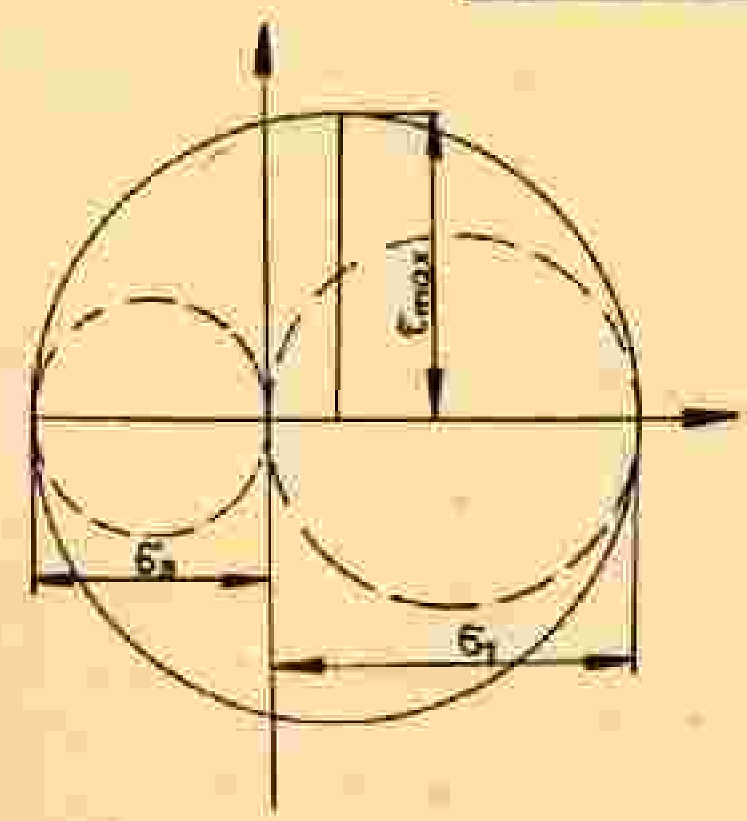
$\boxed{1.5}$

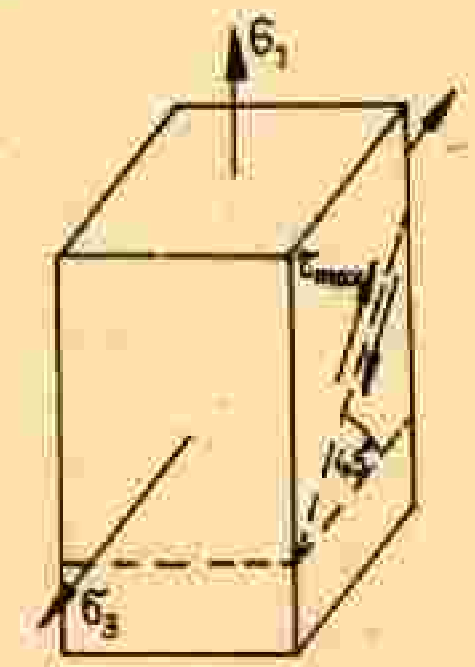
a) $\sigma_3 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}}}$



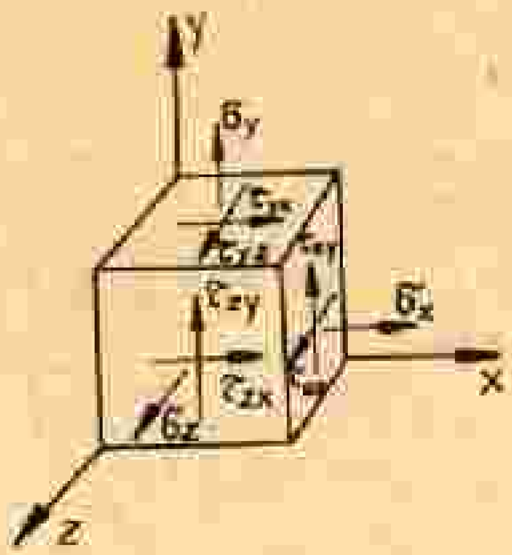


b) $\sigma_3 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}}$





$\boxed{1.6}$



Räumlicher Spannungszustand

Geg.: $\sigma_x = 100\ N/mm^2$; $\tau_{xy} = 0\ N/mm^2$

$\sigma_y = 80\ N/mm^2$; $\tau_{xz} = 20\ N/mm^2$

$\sigma_z = 90\ N/mm^2$; $\tau_{yz} = 20\ N/mm^2$

Ges.: Hauptspannungen

Lösung:

Die Hauptspannungen $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ berechnen sich aus der charakteristischen Gleichung des Spannungstensors.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Mit $\bar{\sigma} = \sigma \cdot 10^{-2}\ mm^2/N$ lautet die Bestimmungsgleichung

$$-\bar{\sigma}^3 + 2{,}7\,\bar{\sigma}^2 - 2{,}34\,\bar{\sigma} + 0{,}648 = 0$$

Die drei Wurzeln sind $\bar{\sigma}_1 = 1{,}2$

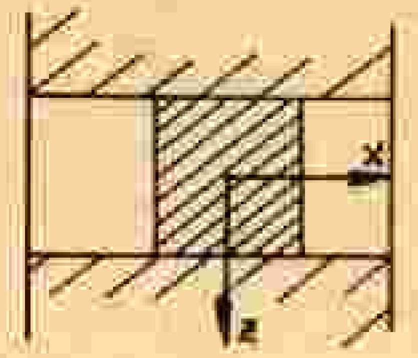
$\bar{\sigma}_2 = 0{,}9$

$\bar{\sigma}_3 = 0{,}6$

Daraus ergeben sich die Hauptspannungen

$\underline{\sigma_1 = 120\ N/mm^2}$; $\underline{\sigma_2 = 90\ N/mm^2}$; $\underline{\sigma_3 = 60\ N/mm^2}$

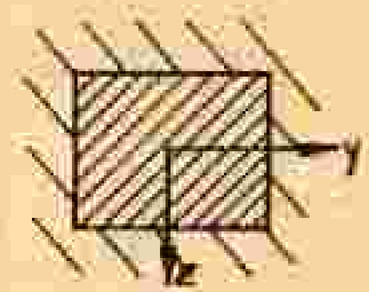
$\boxed{1.7}$



frei verschiebbar in x – Richtung

$\Downarrow$

$\sigma_x = 0$



kein Spiel in y und z Richtung

$\Downarrow$

$\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$

Geg.: $\Delta T = 20 k$

$E = 2{,}06 \cdot 10^5\ N mm^{-2}$

$\nu = 0{,}3$

$\alpha_{th} = 11{,}5 \cdot 10^{-6} k^{-1}$

Ges.: ε_x, σ_y, σ_z nach Erwärmung

Siehe LB S 120 Formelsatz 1.48

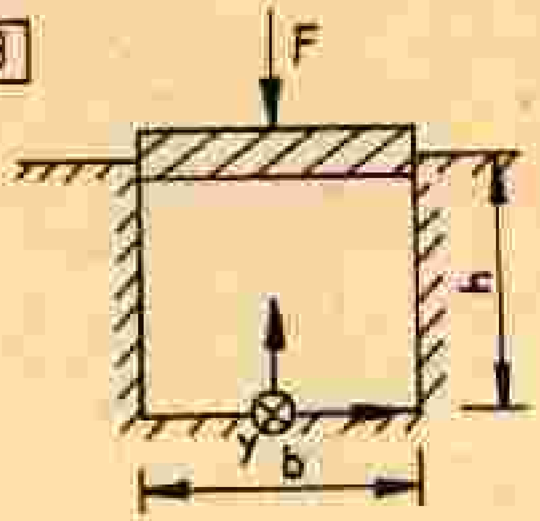
nach Einsetzen der gegebenen Werte folgt:

$$\underline{\underline{\sigma_y = \sigma_z = -\alpha_{th}\ \Delta T \frac{E}{1-\nu} = 67{,}7\ N mm^{-2}}}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} + \alpha_{th}\ \Delta T = -\frac{2\nu\sigma_z}{E} + \alpha_{th}\ \Delta T$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_x = \alpha_{th}\ \Delta T \frac{1+\nu}{1-\nu} = 4{,}27 \cdot 10^{-4}}}$$

1.8



Geg: $b = 20\,mm = h$
$F = 1500\,N$
$E = 10^3\,N\,mm^{-2}$
$\nu = 0{,}4$

Ges: a) σ_x, σ_y, σ_z
b) Δh

<u>RB.:</u> $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ Spielfrei eingepaßter Würfel

<u>Lösung:</u> LB S. 120 Formelsatz 1.48 (ohne Temp. glied)

a) <u>GG:</u> $\sigma_z b^2 = -F$

$$\underline{\sigma_z = -3{,}75\,N\,mm^{-2}}$$

durch Einsetzen der RB in Formelsatz 1.48 ergibt sich

$$\underline{\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\nu}{1-\nu}\,\frac{F}{b^2} = -2{,}50\,N\,mm^{-2}}$$

b) $\varepsilon_z = \frac{\Delta h}{b}$ $\underline{\Delta h = \varepsilon_z \cdot b}$

nach 1.48 ist

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\,(\sigma_x + \sigma_y)\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\,\frac{2\nu}{1-\nu}\,\sigma_z\right)$$

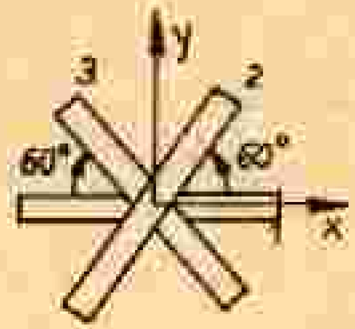
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\right)\sigma_z$$

$$\varepsilon_z = -1{,}75 \cdot 10^{-3}$$

$$\underline{\Delta h = -0{,}035\,mm}$$

1.9

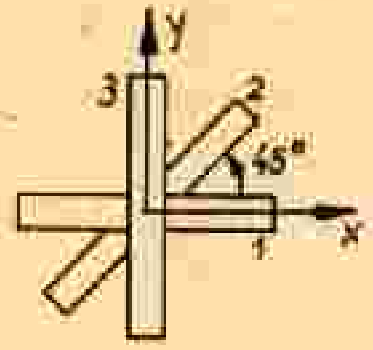
A)



Geg.: $2{,}0 \cdot 10^5\,N/mm^2$, $\nu = 0{,}3$
$\varepsilon_{\varphi 1} = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_{\varphi 2} = 0{,}75 \cdot 10^{-3}$
$\varepsilon_{\varphi 3} = -0{,}4 \cdot 10^{-3}$

Ges.: Für Anordnung A und B

B)



1. ε_x, ε_y und γ_{xy}
2. σ_x, σ_y und τ_{xy}
3. Hauptdehnungen nach Größe und Richtung
4. Hauptspannungen nach Größe und Richtung

<u>Lösung:</u>

Allgemein gilt:

$$\varepsilon_\varphi = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\varphi + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\varphi$$

(φ im math. pos. Sinn von der x-Achse)

A)

1. $\varphi_1 = 0°$, $\varphi_2 = 60°$, $\varphi_3 = 120°$,

$\varepsilon_{\varphi_1} = \varepsilon_x$,

$\varepsilon_{\varphi_2} = \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$,

$\varepsilon_{\varphi_3} = \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$.

Es folgt:

$\varepsilon_x = \varepsilon_{\varphi_1} = \underline{0{,}6 \cdot 10^{-3}}$

$\varepsilon_y = \frac{2}{3}(\varepsilon_{\varphi_2} + \varepsilon_{\varphi_3} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\varphi_1}) = \underline{0{,}0333 \cdot 10^{-3}}$

$\gamma_{xy} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,(\varepsilon_{\varphi_2} - \varepsilon_{\varphi_3}) = \underline{1{,}3279 \cdot 10^{-3}}$.

$\boxed{1.9.}$

2. $\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \underline{134{,}1\ N/mm^2}$

$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \underline{46{,}9\ N/mm^2}$

$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = \underline{102{,}2\ N/mm^2}$

3. $\varepsilon_{1/2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$

$\tan\varphi_{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_x}{\frac{1}{2}\gamma_{xy}}$

$\varepsilon_1 = \underline{1{,}0385 \cdot 10^{-3}}$

$\varepsilon_2 = \underline{-0{,}4052 \cdot 10^{-3}}$

$\tan\varphi_{\varepsilon_1} = 0{,}66044\ , \quad \varphi_{\varepsilon_1} = \underline{33{,}44^\circ}$

4. $\sigma_{1/2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$\tan\varphi_{\sigma_1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$

oder $\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) = 201{,}5\ N/mm^2,$

$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) = -20{,}6\ N/mm^2,$

$\varphi_{\sigma_1} = \varphi_{\varepsilon_1}$

$\boxed{1.9.}$

B) $\varphi_1 = 0^\circ\ , \quad \varphi_2 = 45^\circ\ , \quad \varphi_3 = 90^\circ$

1. $\varepsilon_{\varphi_1} = \varepsilon_x$

$\varepsilon_{\varphi_2} = \frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy}$

$\varepsilon_{\varphi_3} = \varepsilon_y$

Der weitere Rechnungsgang wie unter A

$\varepsilon_x = \varepsilon_{\varphi_1} = 0{,}6 \cdot 10^{-3}\ ,$

$\varepsilon_y = \varepsilon_{\varphi_3} = -0{,}4 \cdot 10^{-3}\ ,$

$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{\varphi_2} - \varepsilon_x - \varepsilon_y = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ .$

2. $\sigma_x = 105{,}5\ N/mm^2\ ,$

$\sigma_y = -48{,}4\ N/mm^2\ ,$

$\tau_{xy} = 100{,}0\ N/mm^2\ ,$

3. $\varepsilon_1 = 0{,}9201 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon_2 = -0{,}7201 \cdot 10^{-3}\ \cdot$

$\varphi_{\varepsilon_1} = 26{,}22^\circ$

4. $\sigma_1 = 154{,}7\ N/mm^2$

$\sigma_2 = -97{,}6\ N/mm^2$

$\varphi_{\sigma_1} = \varphi_{\varepsilon_1}$

1.10.

Auf einer Scheibe sind die Verschiebungen dreier Punkte gemessen worden. Man bestimme den Spannungszustand in diesem Dreieck unter der Annahme, daß die Spannungen im Dreieck konstant sind.

Geg.: $E = 2{,}0 \cdot 10^5\ N/mm^2$; $\nu = 0{,}3$

$x_1 = y_1 = 0$

$x_2 = 100\,mm$; $y_2 = 50\,mm$

$x_3 = 60\,mm$; $y_3 = 120\,mm$

$u_1 = 0{,}05\,mm$; $v_1 = 0{,}08\,mm$

$u_2 = 0{,}16\,mm$; $v_2 = 0{,}12\,mm$

$u_3 = 0{,}10\,mm$; $v_3 = 0{,}20\,mm$

Ges.: σ_x, σ_y, τ_{xy}

Lösung:

$$u = a_1 + b_1 x + c_1 y$$
$$v = a_2 + b_2 x + c_2 y$$

$$u_1 = a_1$$
$$u_2 = a_1 + b_1 x_2 + c_1 y_2$$
$$u_3 = a_1 + b_1 x_3 + c_1 y_3$$

$$b_1 x_2 + c_1 y_2 = u_2 - u_1$$
$$b_1 x_3 + c_1 y_3 = u_3 - u_1$$

$$b_1 = \frac{(u_2 - u_1)\,y_3 - (u_3 - u_1)\,y_2}{x_2 y_3 - x_3 y_2}$$

$$c_1 = \frac{(u_3 - u_1)\,x_2 - (u_2 - u_1)\,x_3}{x_2 y_3 - x_3 y_2}$$

entsprechend

$$a_2 = v_1$$

$$b_2 = \frac{(v_2 - v_1)\,y_3 - (v_3 - v_1)\,y_2}{x_2 y_3 - x_3 y_2}$$

$$c_2 = \frac{(v_3 - v_1)\,x_2 - (v_2 - v_1)\,x_3}{x_2 y_3 - x_3 y_2}$$

1.10.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = b_1$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = c_2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = c_1 + b_2$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\,\gamma_{xy}$$

Zahlenwerte:

$$\varepsilon_x = 1{,}189 \cdot 10^{-3}$$
$$\varepsilon_y = 1{,}067 \cdot 10^{-3}$$
$$\gamma_{xy} = -0{,}3111 \cdot 10^{-3}$$
$$\sigma_x = 331{,}7\ N/mm^2$$
$$\sigma_y = 312{,}9\ N/mm^2$$
$$\tau_{xy} = -23{,}9\ N/mm^2$$