2.18

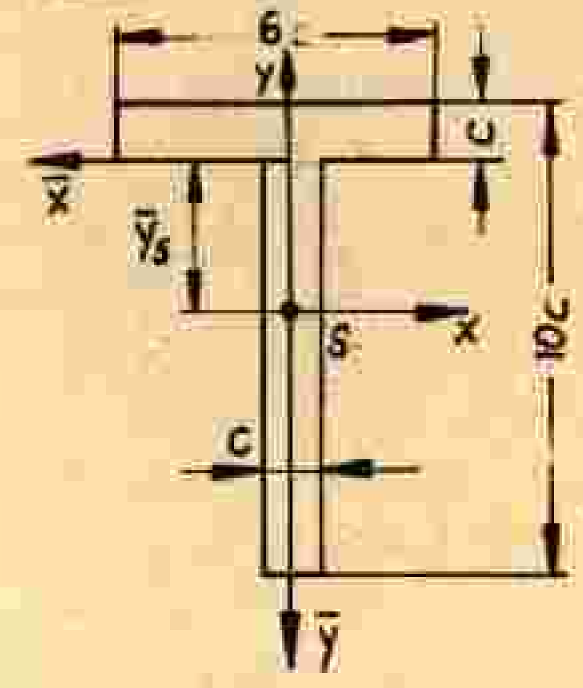
aus (1) und (2) folgt:

$$p_d = \frac{n A_s E_s \frac{\Delta l}{l_s} - p \frac{\pi}{4} d_a^2}{\frac{E_s}{E_d} \cdot \frac{l_d}{l_s} \cdot n \cdot A_s + \frac{\pi}{4}(d_i^2 - d_a^2)}$$

$$p_d = \frac{36 \cdot 201 \cdot 2{,}06 \cdot 10^5 \frac{0{,}029088}{52} - 2 \frac{\pi}{4} 500^2}{\frac{2{,}06 \cdot 10^5}{1{,}25 \cdot 10^6} \cdot \frac{2}{52} \cdot 36 \cdot 201 + \frac{\pi}{4}(550^2 - 500^2)}$$

$$p_d = \underline{10{,}58 \text{ N/mm}^2}$$

3.1



1) $\bar{x}_s = 0$ (Symmetrie)

$$\bar{y}_s = \frac{\frac{9}{2}c \cdot 9c^2 - \frac{1}{2}c \cdot 6c^2}{9c^2 + 6c^2}$$

$$\underline{\bar{y}_s = \frac{5}{2}c}$$

2) $I_{xy} = 0$ (Symmetrie)

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{2} (I_{xxi} + A_i y_{si}^2)$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^{2} (I_{yyi} + A_i x_{si}^2).$$

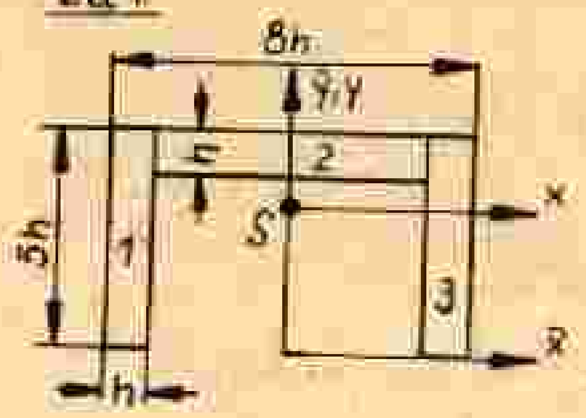
i	A_i	x_{si}	y_{si}	I_{xxi}	I_{yyi}	$A_i x_{si}^2$	$A_i y_{si}^2$
1	$9c^2$	0	$-2c$	$\frac{c(9c)^3}{12}$	$\frac{9c \cdot c^3}{12}$	0	$36c^4$
2	$6c^2$	0	$+3c$	$\frac{6c\,c^3}{12}$	$\frac{c(6c)^3}{12}$	0	$54c^4$
Σ	$15c^2$	–	–	$\frac{245}{4}c^4$	$\frac{75}{4}c^4$	0	$90c^4$

$$I_{xx} = \frac{245}{4}c^4 + 90c^4 = \underline{\frac{605}{4}c^4}$$

$$I_{yy} = \underline{\frac{75}{4}c^4}$$

$\boxed{3.2}$

Zu 1.



$\bar{x}_S = 0$ (Symmetrie)

$$\bar{y}_S = \frac{\sum \bar{y}_{Si} A_i}{\sum A_i} = \frac{\frac{5}{2}h \cdot 5h^2 \cdot 2 + \frac{9}{2}h \cdot 6h^2}{5h^2 + 6h^2 + 5h^2}$$

$$= \underline{\frac{13}{4}h}$$

Zu 2.

$$I_{xx} = \sum_i (I_{xxi} + y_{si}^2 A_i)$$

$$I_{yy} = \sum_i (I_{yyi} + x_{si}^2 A_i)$$

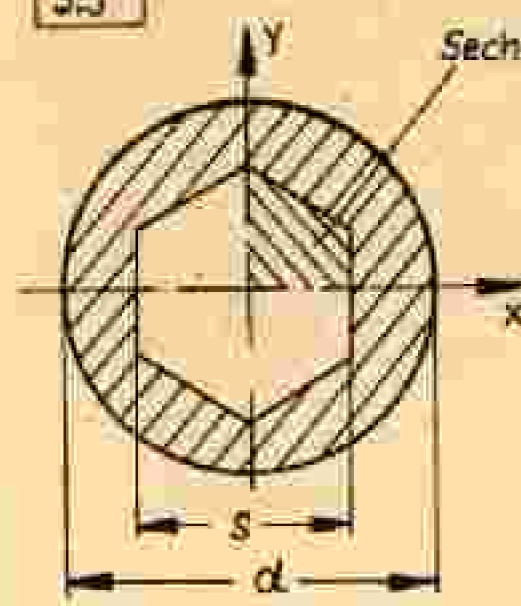
$$I_{xy} = 0$$

i	A_i	x_{si}	y_{si}	I_{xxi}	I_{yyi}	$x_{si}^2 A_i$	$y_{si}^2 A_i$
1	$5h^2$	$-\frac{7}{2}h$	$-\frac{3}{4}h$	$\frac{h(5h)^3}{12}$	$\frac{5h \cdot h^3}{12}$	$\frac{49}{4}h^2 \cdot 5h^2$	$\frac{9}{16}h^2 \cdot 5h^2$
2	$6h^2$	0	$\frac{5}{4}h$	$\frac{6h \cdot h^3}{12}$	$\frac{h(6h)^3}{12}$	0	$\frac{25}{16}h^2 \cdot 6h^2$
3	$5h^2$	$\frac{7}{2}h$	$-\frac{3}{4}h$	$\frac{h(5h)^3}{12}$	$\frac{5h \cdot h^3}{12}$	$\frac{49}{4}h^2 \cdot 5h^2$	$\frac{9}{16}h^2 \cdot 5h^2$
Σ	$16h^2$	—	—	$\frac{256}{12}h^4$	$\frac{226}{12}h^4$	$\frac{490}{4}h^4$	$\frac{60}{4}h^4$

$$I_{xx} = \sum_i I_{xxi} + \sum_i y_{si}^2 A_i = \frac{256}{12}h^4 + \frac{60}{4}h^4 = \underline{\frac{109}{3}h^4}$$

$$I_{yy} = \sum_i I_{yyi} + \sum_i x_{si}^2 A_i = \frac{226}{12}h^4 + \frac{490}{4}h^4 = \underline{\frac{424}{3}h^4}$$

$\boxed{3.3}$

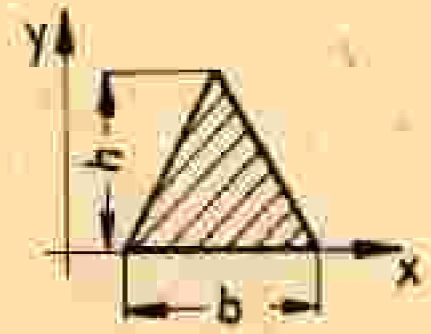


$I_{xx} = I_{yy}$ (mehrfache Symmetrie)

$$I_{xx} = I_{xxk} - I_{xxs}$$

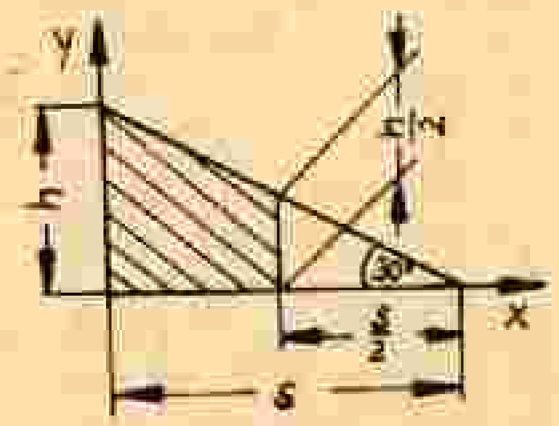
$$I_{xxk} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Zerlegung der Sechskantfläche in 4 gleiche Teilflächen. Die Teilflächen werden weiter in Dreiecke zerlegt.



Dreieck: $I_{xx} = \frac{bh^3}{12}$

Teilfläche zusammensetzen aus zwei Dreiecken



$$h = \frac{s}{\sqrt{3}}$$

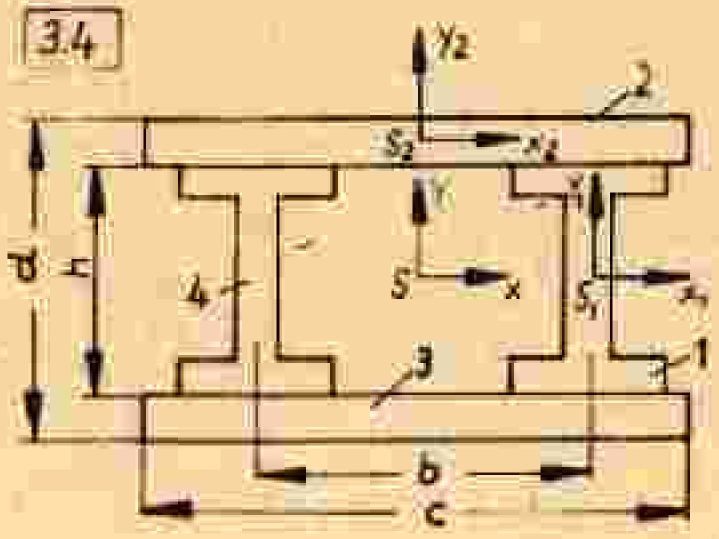
$$I_{xxs} = 4\left\{\frac{s\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)^3}{12} - \frac{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2\sqrt{3}}\right)^3}{12}\right\}$$

$$I_{xxs} = \frac{5\sqrt{3}}{144}s^4$$

Gesamtfläche

$$\underline{I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{5\sqrt{3}}{144}s^4}$$

3.4



Aus TGL 0-1025 Bl.1 für I 20

$A = 3{,}35 \cdot 10^3\ mm^2$

$I_{xx} = 21{,}4 \cdot 10^6\ mm^4$

$I_{yy} = 1{,}17 \cdot 10^6\ mm^4$

$h = 200\ mm$

$b = 300\ mm$

$c = 400\ mm$

Gurte:

$$A_2 = \frac{d-h}{2} \cdot c = 4 \cdot 10^3\ mm^2$$

$$\underline{I_{xx} = \frac{c}{12}\left(\frac{d-h}{2}\right)^3 = 33{,}33 \cdot 10^3\ mm^4}; \quad \underline{I_{yy} = \frac{d-h}{2} \cdot \frac{c^3}{12} = 53{,}33 \cdot 10^6\ mm^4}$$

Berechnung mittels Tabelle

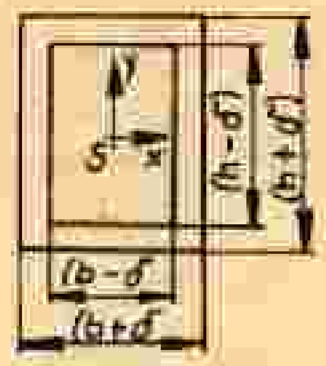
i	A_i	x_{si}	y_{si}	I_{xixi}	I_{yiyi}	$y_{si}^2 A_i$	$x_{si}^2 A_i$
	mm^2	mm	mm	mm^4	mm^4	mm^4	mm^4
1	$3{,}35 \cdot 10^3$	150	0	$21{,}4 \cdot 10^6$	$1{,}17 \cdot 10^6$	0	$75{,}38 \cdot 10^6$
2	$4 \cdot 10^3$	0	105	$0{,}0\bar{3} \cdot 10^6$	$53{,}\bar{3} \cdot 10^6$	$44{,}1 \cdot 10^6$	0
3	$4 \cdot 10^3$	0	105	$0{,}0\bar{3} \cdot 10^6$	$53{,}\bar{3} \cdot 10^6$	$44{,}1 \cdot 10^6$	0
4	$3{,}35 \cdot 10^3$	150	0	$21{,}4 \cdot 10^6$	$1{,}17 \cdot 10^6$	0	$75{,}38 \cdot 10^6$
Σ	$14{,}7 \cdot 10^3$	—	—	$42{,}87 \cdot 10^6$	$109{,}0 \cdot 10^6$	$88{,}2 \cdot 10^6$	$150{,}8 \cdot 10^6$

$$\underline{I_{xx}} = (42{,}87 + 88{,}2) \cdot 10^6\ mm^4 = \underline{131{,}1 \cdot 10^6\ mm^4}$$

$$\underline{I_{yy}} = (109{,}0 + 150{,}8) \cdot 10^6\ mm^4 = \underline{259{,}8 \cdot 10^6\ mm^4}$$

3.5

Zu 1



$$I_{xx} = \frac{(b+\delta)(h+\delta)^3}{12} - \frac{(b-\delta)(h-\delta)^3}{12}$$

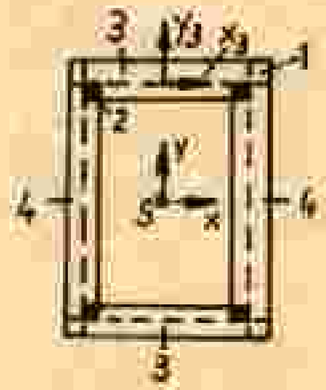
$$\underline{I_{xx} = \frac{\delta h^2}{6}(h+3b) + \frac{\delta^3}{6}(b+3h)}$$

$$I_{yy} = \frac{(h+\delta)(b+\delta)^3}{12} - \frac{(h-\delta)(b-\delta)^3}{12}$$

$$\underline{I_{yy} = \frac{\delta b^2}{6}(3h+b) + \frac{\delta^3}{6}(h+3b)}$$

Zahlenwerte: $\underline{I_{xx} = 53{,}52 \cdot 10^3\ mm^4}$; $\underline{I_{yy} = 18{,}8 \cdot 10^3\ mm^4}$

Zu 2



$$\underline{I_{xx}} = 2\left[\frac{\delta h^3}{12} + b \cdot \delta \left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = \underline{\frac{\delta h^2}{6}(h+3b)}$$

$$\underline{I_{yy}} = 2\left[\frac{\delta b^3}{12} + h\delta \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = \underline{\frac{\delta b^2}{6}(b+3h)}$$

Zahlenwerte:

$\underline{I_{xx} = 53{,}33 \cdot 10^3\ mm^4}$; $\underline{I_{yy} = 18{,}67 \cdot 10^3\ mm^4}$

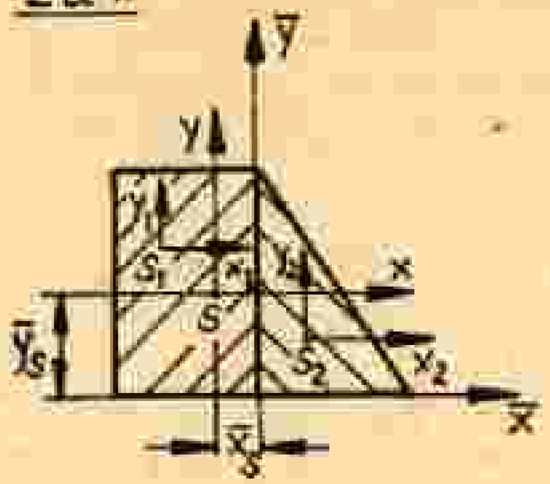
Zu 3

Bei der Berechnung von I_{xx} als Trägheitsmoment eines dünnwandigen Profiles werden die Summanden $\frac{b\delta^3}{6}$ und $\frac{h\delta^3}{2}$ vernachlässigt.

$\boxed{3.6}$

Trägheitsmomente einer aus 2 Teilflächen zusammengesetzten Fläche

Zu 1.



$$\bar{x}_S = \frac{\sum \bar{x}_{Si} A_i}{\sum A_i} = \frac{-\frac{3}{2}a \cdot 15a^2 + a \cdot \frac{15}{2}a^2}{15a^2 + \frac{15}{2}a^2}$$

$$\bar{y}_S = \frac{\sum \bar{y}_{Si} A_i}{\sum A_i} = \frac{\frac{5}{2}a \cdot 15a^2 + \frac{5}{3}a \cdot \frac{15}{2}a^2}{15a^2 + \frac{15}{2}a^2}$$

$$\underline{\bar{x}_S = -\frac{2}{3}a} \; ; \quad \underline{\bar{y}_S = \frac{20}{9}a}$$

Zu 2.

$$I_{\bar{x}\bar{x}_1} = \frac{3a \cdot (5a)^3}{3} = 125a^4; \; I_{\bar{y}\bar{y}_1} = \frac{5a(3a)^3}{3} = 45a^4; \; I_{\bar{x}\bar{y}_1} = \frac{(3a)^2(5a)^2}{4} = \frac{225}{4}a^4$$

$$I_{\bar{x}\bar{x}_2} = \frac{3a(5a)^3}{12} = \frac{125}{4}a^4; \; I_{\bar{y}\bar{y}_2} = \frac{5a \cdot (3a)^3}{12} = \frac{45}{4}a^4; \; I_{\bar{x}\bar{y}_2} = -\frac{(3a)^2(5a)^2}{24} = -\frac{75}{8}a^4$$

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{\bar{x}\bar{x}_1} + I_{\bar{x}\bar{x}_2} = 125\left(1+\tfrac{1}{4}\right)a^4 = \frac{625}{4}a^4 \qquad \underline{I_{\bar{x}\bar{x}} = 156{,}3\,a^4}$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{\bar{y}\bar{y}_1} + I_{\bar{y}\bar{y}_2} = 45\left(1+\tfrac{1}{4}\right)a^4 = \frac{225}{4}a^4 \qquad \underline{I_{\bar{y}\bar{y}} = 56{,}3\,a^4}$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{\bar{x}\bar{y}_1} + I_{\bar{x}\bar{y}_2} = \frac{225}{4}a^4 - \frac{75}{8}a^4 = \frac{375}{8}a^4 \quad \underline{I_{\bar{x}\bar{y}} = 46{,}9\,a^4}$$

$\boxed{3.6}$

Zu 3.

Satz von Steiner, Transformation der Trägheitsmomente der Gesamtfläche von beliebiger Achse auf Schwerpunktachse

$$I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{y}_S^2 A = \frac{625}{4}a^4 - \left(\frac{20}{9}a\right)^2 \frac{45}{2}a^2 = \frac{1625}{36}a^4; \quad \underline{I_{xx} = 45{,}1\,a^4}$$

$$I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}} - \bar{x}_S^2 A = \frac{225}{4}a^4 - \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \frac{45}{2}a^2 = \frac{185}{4}a^4; \quad \underline{I_{yy} = 46{,}3\,a^4}$$

$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{x}_S \bar{y}_S A = \frac{375}{8}a^4 + \left(-\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{20}{9}a\right)\frac{45}{2}a^2 = \frac{325}{24}a^4; \quad \underline{I_{xy} = 13{,}5\,a^4}$$

Zu 4.

Satz von Steiner, Transformation der Eigenträgheitsmomente der Teilflächen auf beliebige Achsen (Schwerpunktachsen der Gesamtfläche)

$$I_{xx} = \sum_i \left(I_{x_i x_i} + y_{Si}^2 A_i\right); \; I_{yy} = \sum_i \left(I_{y_i y_i} + x_{Si}^2 A_i\right); \; I_{xy} = \sum_i \left(I_{x_i y_i} - x_{Si} y_{Si} A_i\right)$$

i	A_i	x_{Si}	y_{Si}	$I_{x_i x_i}$	$I_{y_i y_i}$	$I_{x_i y_i}$	$y_{Si}^2 A_i$	$x_{Si}^2 A_i$	$x_{Si} y_{Si} A_i$
1	$15a^2$	$-\frac{5}{6}a$	$+\frac{5}{18}a$	$\frac{125}{4}a^4$	$\frac{45}{4}a^4$	0	$\frac{125}{108}a^4$	$\frac{125}{12}a^4$	$-\frac{125}{36}a^4$
2	$\frac{15}{2}a^2$	$+\frac{5}{3}a$	$-\frac{5}{9}a$	$\frac{125}{12}a^4$	$\frac{15}{4}a^4$	$\frac{25}{8}a^4$	$\frac{125}{54}a^4$	$\frac{125}{6}a^4$	$-\frac{125}{18}a^4$
Σ				$\frac{250}{6}a^4$	$15a^4$	$\frac{25}{8}a^4$	$\frac{125}{36}a^4$	$\frac{125}{4}a^4$	$-\frac{125}{12}a^4$

$\boxed{3.6}$

$$I_{xx} = \frac{250}{6}a^4 + \frac{125}{36}a^4 - \frac{1625}{36}a^4 \qquad \underline{I_{xx} = 45{,}1\,a^4}$$

$$I_{yy} = 15a^4 + \frac{125}{4}a^4 = \frac{185}{4}a^4 \qquad \underline{I_{yy} = 46{,}3\,a^4}$$

$$I_{xy} = \frac{25}{8}a^4 - \left(-\frac{125}{12}a^4\right) = \frac{325}{24}a^4 \qquad \underline{I_{xy} = 13{,}5\,a^4}$$

Zu 5.

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2I_{xy}}{I_{xx}-I_{yy}} = -\frac{195}{8} = -24{,}4 \Rightarrow \underline{2\varphi_0 \approx -87{,}7^\circ};\ \underline{\varphi_0 \approx -43{,}8^\circ}$$

$$I_{1/2} = 45{,}7a^4 \pm \sqrt{(0{,}6a^4)^2 + (13{,}5a^4)^2} \approx 45{,}7a^4 \pm 13a^4$$

$$\underline{I_1 \approx 59{,}2\,a^4} \qquad \underline{I_2 \approx 32{,}2\,a^4}$$

Die Lösungen der Aufgaben 3.7 bis 3.11 wurden mit einem Rechenprogramm erhalten.

$\boxed{3.7}$

Querschnittsfläche	$A = 13{,}0\ cm^2$
x-Koordinate des Schwerpunktes S	$x_S = 1{,}6538\ cm$
y-Koordinate des Schwerpunktes S	$y_S = -2{,}6538\ cm$
Trägheitsmoment bezogen auf x-Achse durch S	$I_{xx} = 80{,}78\ cm^4$
Trägheitsmoment bezogen auf y-Achse durch S	$I_{yy} = 38{,}78\ cm^4$
Deviationsmoment bezogen auf x-y-S	$I_{xy} = -32{,}31\ cm^4$
Maximales Trägheitsmoment bezogen auf 1-Achse	$I_1 = 98{,}31\ cm^4$
Minimales Trägheitsmoment bezogen auf 2-Achse	$I_2 = 21{,}24\ cm^4$
Winkel zwischen x- und I-Achse	$\alpha = 28{,}49^\circ$

$\boxed{3.8}$

Querschnittsfläche	$A = 18{,}0\ cm^2$
x-Koordinate des Schwerpunktes S	$x_S = 0{,}0\ cm$
y-Koordinate des Schwerpunktes S	$y_S = 0{,}0\ cm$
Trägheitsmoment bezogen auf x-Achse durch S	$I_{xx} = 246{,}0\ cm^4$
Trägheitsmoment bezogen auf y-Achse durch S	$I_{yy} = 61{,}5\ cm^4$

$\boxed{3.8}$

Deviationsmoment

bezogen auf x-y-S $I_{xy} = -90{,}0\ cm^4$

Maximales Trägheitsmoment

bezogen auf 1-Achse $I_1 = 282{,}63\ cm^4$

Minimales Trägheitsmoment

bezogen auf 2-Achse $I_2 = 24{,}87\ cm^4$

Winkel zwischen x- und I-Achse $\alpha = 22{,}15°$

$\boxed{3.9}$

Querschnittsfläche $A = 530{,}0\ cm^2$

x-Koordinate des Schwerpunktes S $x_S = 0{,}0\ cm$

y-Koordinate des Schwerpunktes S $y_S = 36{,}54\ cm$

Trägheitsmoment

bezogen auf x-Achse durch S $I_{xx} = 397563{,}4\ cm^4$

Trägheitsmoment

bezogen auf y-Achse durch S $I_{yy} = 307096{,}7\ cm^4$

Deviationsmoment

bezogen auf x-y-S $I_{xy} = 0{,}0\ cm^4$

Maximales Trägheitsmoment

bezogen auf 1-Achse $I_1 = 397563{,}4\ cm^4$

Minimales Trägheitsmoment

bezogen auf 2-Achse $I_2 = 307096{,}7\ cm^4$

Winkel zwischen x- und I-Achse $\alpha = 0{,}0°$

$\boxed{3.10}$

Querschnittsfläche $A = 105{,}0\ cm^2$

x-Koordinate des Schwerpunktes S $x_S = 0{,}0\ cm$

y-Koordinate des Schwerpunktes S $y_S = 8{,}6286\ cm$

Trägheitsmoment

bezogen auf x-Achse durch S $I_{xx} = 1579{,}0\ cm^4$

Trägheitsmoment

bezogen auf y-Achse durch S $I_{yy} = 817{,}5\ cm^4$

Deviationsmoment

bezogen auf x-y-S $I_{yx} = 0{,}0\ cm^4$

Maximales Trägheitsmoment

bezogen auf I-Achse $I_1 = 1579{,}0\ cm^4$

Minimales Trägheitsmoment

bezogen auf II-Achse $I_2 = 817{,}5\ cm^4$

Winkel zwischen x- und I-Achse $\alpha = 0{,}0°$

$\boxed{3.11}$

Querschnittsfläche $A = 73{,}83\ cm^2$

Symmetrie!

Schwerpunkt $x_S = y_S = 0{,}0\ cm$

Trägheitsmomente $I_{xx} = I_{yy} = 461{,}72\ cm^4$

Deviationsmoment $I_{xy} = 0{,}0\ cm^4$

Hauptträgheitsmomente $I_1 = I_2 = 461{,}72\ cm^4$