5.1

1) da M_t, I_t konstant folgt $\varphi_L = \frac{M_t}{G I_t} l$

$M_t = \frac{\varphi_L}{l} G \cdot I_t$ mit $I_t = \frac{\pi}{2} R^4$ für Vollwelle

mit Hilfe von $\frac{\varphi^\circ}{360^\circ} = \frac{\hat{\varphi}}{2\pi}$ folgt dann

$$M_t = \frac{\varphi^\circ}{l} \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot G \cdot \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{30^\circ \cdot 2\pi \cdot 7{,}92 \cdot 10^4 \, N \, \pi \cdot mm^4}{240 \, mm \cdot 360^\circ \, mm^2}$$

$$\underline{M_t = 0{,}0271 \cdot 10^4 \, Nmm = 0{,}271 \, Nm}$$

2) Torsionsschubspannung $\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$ mit $W_t = \frac{\pi}{2} R^3$

$$\underline{\tau_t} = \frac{2 M_t}{\pi R^3} = \frac{2 \cdot 0{,}271 \, Nmm \cdot 10^3}{\pi \, mm^3} = \underline{172 \frac{N}{mm^2}}$$

5.2

1) Leistung $P = M_t \cdot \omega$ mit $\omega = 2\pi n$

$$P = F \cdot l_1 \cdot 2\pi n = 150 N \cdot 0{,}4 m \cdot 2\pi \frac{24}{60 s} = 151 \frac{Nm}{s} = \underline{151 W}$$

2) Torsionsschubspannung $\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$ mit $W_t = \frac{\pi}{2} R^3$ für Vollwelle

$$\tau_t = \frac{2 M_t}{\pi R^3} = \frac{2 \cdot F \cdot l_1}{\pi R^3} = \frac{2 \cdot 150 N \cdot 400 \, mm}{\pi \cdot 15^3 \, mm^3} = \underline{11{,}28 \frac{N}{mm^2}}$$

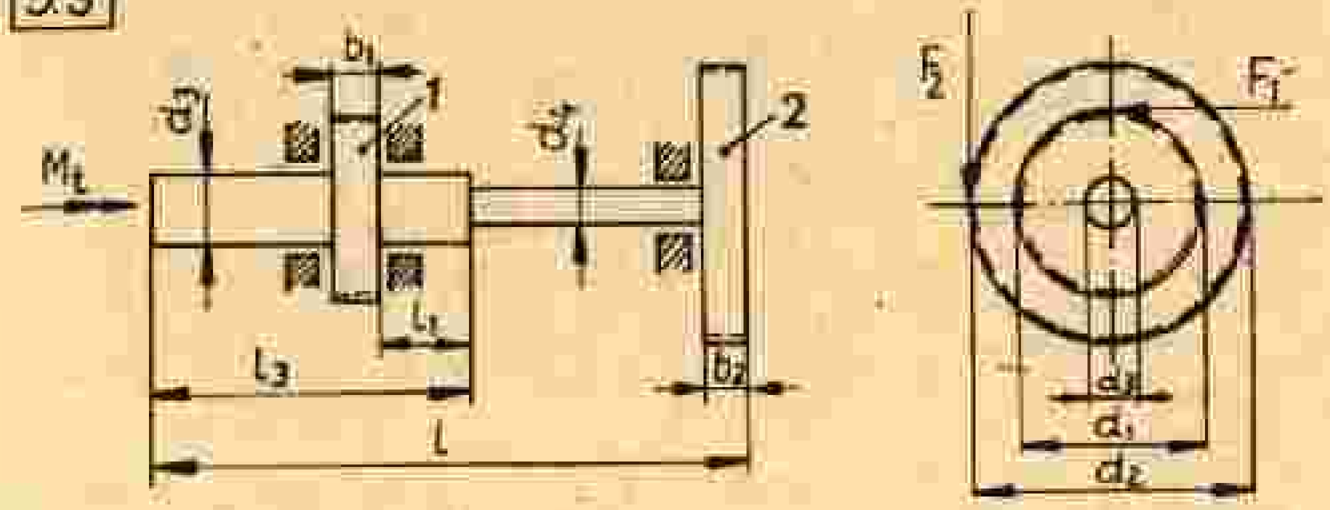
3) Verdrehung $\hat{\varphi}_L = \frac{M_t}{G I_t} l_2$ mit $I_t = W_t \cdot R$ für Vollwelle

$$\hat{\varphi}_L = \frac{M_t}{W_t} \cdot \frac{l_2}{GR} = \tau_t \cdot \frac{l_2}{GR} = \frac{11{,}28 N \cdot 1000 \, mm \cdot mm^2}{mm^2 \cdot 7{,}92 \, N \cdot 10^4 \cdot 15 \, mm}$$

$\hat{\varphi}_L = 0{,}95 \cdot 10^{-2}$ mit Hilfe von $\frac{\hat{\varphi}_L}{2\pi} = \frac{\varphi^\circ}{360^\circ}$

$$\underline{\varphi_L^\circ = 0{,}54^\circ}$$

5.3



1. Bestimmung von M_{t0}

$$M_{t0} = F_1 \cdot \frac{d_1}{2} + F_2 \cdot \frac{d_2}{2} = 2 \cdot 10^4 N \cdot 0{,}1 m + 5 \cdot 10^3 N \cdot 0{,}2 m$$

$$M_{t0} = \underline{3 \cdot 10^3 \, Nm}$$

2. Bestimmung von d_1 und d_2

Es gilt $\tau_{max} \leq \tau_{zul}$

$\tau_{zul} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{2} R^3}$ Daraus folgt für $d = \frac{R}{2}$:

Umstellung nach d: $d = 2 \sqrt[3]{\frac{2 M_t}{\pi \tau_{zul}}}$

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{16 M_{t0}}{\pi \tau}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10^6 \, Nmm}{\pi \cdot 1 \cdot 10^2 \, Nmm^{-2}}} = \underline{53{,}5 \, mm}$$

$$d_4 = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot F_2 \cdot d_2}{\pi \tau}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 5 \cdot 10^3 N \cdot 400 mm}{\pi \cdot 1 \cdot 10^2 \, Nmm^{-2}}} = \underline{37 \, mm}$$

3. Gesamtverdrehwinkel φ

(Verformung der Zahnräder wird vernachlässigt)

$\varphi = \frac{M_t}{G \cdot I_t} l$ mit $I_t = \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{\pi}{32} d^4$

$$\varphi = \frac{32}{\pi G} \left(\frac{M_{t0}}{d_3^4} (l_3 - l_1 - b_1) + \frac{F_1 \frac{d_1}{2}}{d_3^4} l_1 + \frac{F_2 \frac{d_2}{2}}{d_4^4} (l - l_3 - b_2) \right)$$

5.3

$$\varphi = \frac{32}{\pi \cdot 8{,}1 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,mm^{-2}}} \left(\frac{3 \cdot 10^5\,\mathrm{Nmm}}{53{,}5^4\,\mathrm{mm^4}} \cdot 250\,\mathrm{mm} + \frac{5 \cdot 10^3\,\mathrm{N} \cdot 200}{53{,}5^4\,\mathrm{mm^4}} \cdot 100\,\mathrm{mm} + \frac{5 \cdot 10^3\,\mathrm{N} \cdot 200\,\mathrm{mm}}{37^4\,\mathrm{mm^4}} \cdot 550\,\mathrm{mm} \right)$$

$$\underline{\varphi = 5 \cdot 10^{-2}}$$

5.4

Übersetzungsverhältnis: $i = \frac{d_{ab}}{d_{an}} = \frac{M_{an}}{M_{ab}} = \frac{\omega_{an}}{\omega_{ab}}$ mit $\omega = 2\pi n$

Wirkungsgrad: $\eta = \frac{P_{ab}}{P_{an}} = \frac{M_{ab} \cdot \omega_{ab}}{M_{an} \cdot \omega_{an}}$

Daraus folgt $\frac{M_{ab}}{M_{an}} = i \cdot \eta$

Spannungsbeziehung: $\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$ für $W_t = \frac{M_t}{\frac{\pi}{2} R^3} = \frac{16 M_t}{\pi D^3}$

Da gleiche Festigkeit vorausgesetzt wird: $\tau_{ab} = \tau_{an}$

folgt daraus $\frac{16 M_{ab}}{\pi D_{ab}^3} = \frac{16 M_{an}}{\pi D_{an}^3}$

$$\frac{D_{ab}^3}{D_{an}^3} = \frac{M_{ab}}{M_{an}} = i \cdot \eta$$

Ohne Berücksichtigung von η: $\frac{D_{ab}}{D_{an}} = \underline{2{,}52}$ $(\eta = 1)$

Mit $\eta_{St} = 0{,}96$: $\frac{D_{ab}}{D_{an}} = \sqrt[3]{16 \cdot 0{,}92} = \underline{2{,}45}$

5.5

1. **relative Spannungszunahme**

$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$ für $W_t = \frac{\pi}{2} R^3 = \frac{\pi}{16} D^3$ (Vollwelle)

Für D_1 und D_2 ergibt sich

(1) $\tau_{t_1} = \frac{16 M_{t1}}{\pi D_1^3}$ und (2) $\tau_{t2} = \frac{16 M_{t2}}{\pi D_2^3}$

Da M_t konstant $M_{t1} = M_{t2}$ Umstellung der Gleichung (1) nach Biegemoment M_t und Einsetzen in (2)

Es folgt

$$\tau_{t2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3 \tau_{t_1} = \left(\frac{50\,\mathrm{mm}}{48\,\mathrm{mm}}\right)^3 \tau_{t_1} = \underline{1{,}13\,\tau_{t1}}$$

relative Spannungszunahme 13 %

2. **relative Drillungszunahme**

$\varphi = \frac{M_t\, l}{G \cdot I_t}$ für $I_t = \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{\pi}{32} D_4$ (Vollwelle)

Für D_1 und D_2 folgt

(3) $\varphi_1 = \frac{M_t}{G I_{t_1}} l_1$ und (4) $\varphi_2 = \frac{M_t}{G I_{t_2}} l_2$

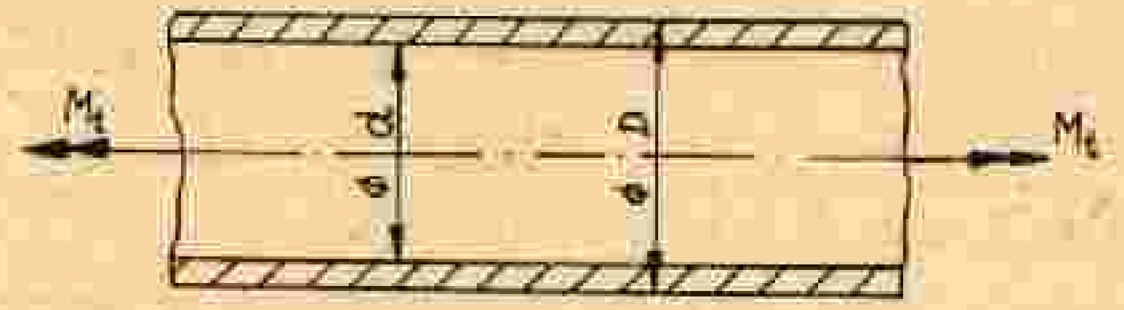
Da $l_1 = l_2 = l$ Umstellung der Gleichung (3) nach M_t und Einsetzen in (4)

Es folgt

$$\varphi_2 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 \cdot \varphi_1 = \left(\frac{50\,\mathrm{mm}}{48\,\mathrm{mm}}\right)^4 \cdot \varphi_1 = \underline{1{,}177\,\varphi_1}$$

relative Drillungszunahme 17,7 %

5.6



1. Gewichtsersparnis

$$A_{Vollwelle} = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi \cdot 60^2}{4}\, mm^2$$

$$A_{Hohlwelle} = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi\, 30^2}{4}\, mm^2$$

$$G_e = \frac{\pi \cdot 30^2 mm^2 \cdot 4 \cdot 100\,\%}{4 \cdot \pi \cdot 60^2 mm^2} = 25\,\%$$

2. relative Spannungserhöhung

Vollwelle: $\tau_{max_V} = \frac{M_t}{W_{t_V}}$; $W_{tV} = \frac{\pi D^3}{16} = 42411{,}5\, mm^3$

Hohlwelle: $\tau_{max_H} = \frac{M_t}{W_{tH}}$; $W_{tH} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\frac{D^4}{16} - \frac{d^4}{16}}{\frac{D}{2}}\right]$

$$W_{tH} = 39760{,}8\, mm^3$$

relative Spannungserhöhung:

$$\frac{\tau_{maxH} - \tau_{maxV}}{\tau_{max\,V}} = \frac{\frac{M_t}{W_{tH}} - \frac{M_t}{W_{tV}}}{\frac{M_t}{W_{tV}}} = \frac{W_V}{W_H} - 1 = 0{,}0667$$

relative Spannungserhöhung = 6,67 %

5.6

3. relative Drillungszunahme

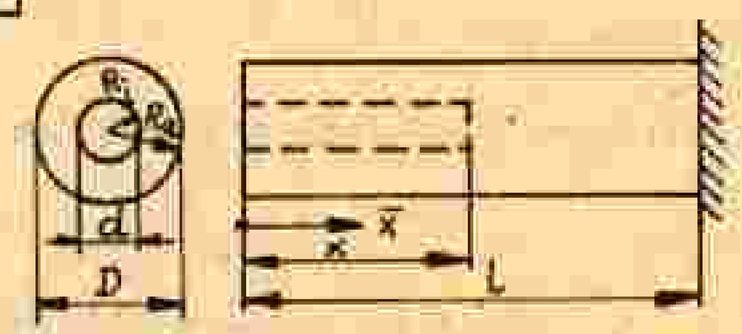
Vollwelle: $\vartheta_V = \frac{M_t}{GI_{tV}}$; $I_{tV} = \frac{W_{tV}\, D}{2} = 1272345\, mm^4$

Hohlwelle: $\vartheta_H = \frac{M_t}{GI_{tH}}$; $I_{tH} = \frac{W_{tH}\, D}{2} = 1192824\, mm^4$

$$\frac{\vartheta_H - \vartheta_V}{\vartheta_V} = \frac{\frac{M_t}{GI_{tH}} - \frac{M_t}{GI_{tV}}}{\frac{M_t}{GI_{tV}}} = \frac{I_{tV}}{I_{tH}} - 1 = 0{,}0667$$

relative Drillungszunahme = 6,67 %

5.7



1. Torsionssteifigkeit $c_t = M_t/\varphi$

2. Torsionsträgheitsmomente

$0 \le \bar{x} \le x$ $\quad I_{t_1} = \frac{\pi}{2}(R_a^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$

$x \le \bar{x} \le l$ $\quad I_{t_2} = \frac{\pi}{2} R_a^4 = \frac{\pi}{32} D^4$

3. Einheitsverdrehung

$$\frac{d\varphi}{d\bar{x}} = \frac{M_t}{GI_{t_1}} + \frac{M_t}{GI_{t_2}} = \frac{32\, M_t}{G\pi(D^4 - d^4)} + \frac{32\, M_t}{G\pi D^4}$$

5.7

4. Gesamtverdrehwinkel

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \int_0^x \frac{32}{G\pi(D^4-d^4)}\,d\bar{x} + \int_x^l \frac{32 M_t}{G\pi D^4}\,d\bar{x}$$

$$= \frac{32 M_t}{G\pi}\left[\frac{x}{(D^4-d^4)} + \frac{(l-x)}{D^4}\right] = \frac{M_t}{C_t}$$

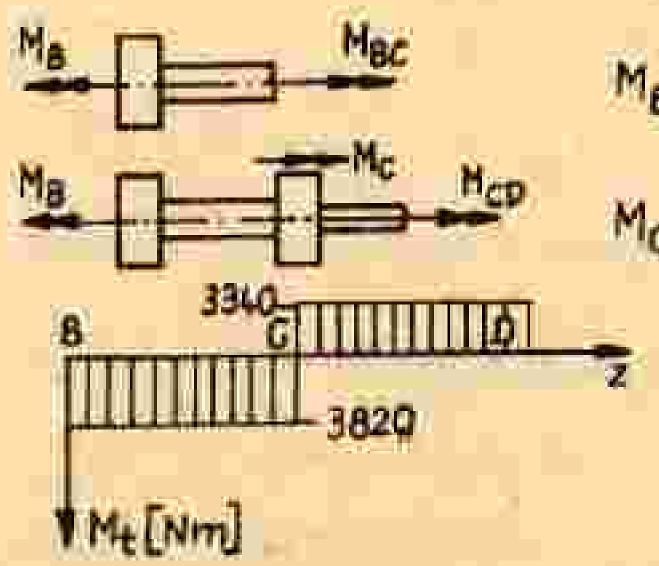
$$\curvearrowright x = \left(\frac{G\pi D^4}{32 C_t} - l\right)\left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right)$$

5.8

1. Leistungsbilanz $P_C = P_B + P_D \longrightarrow P_D = 70\,\text{kW}$

2. Torsionsmomentenverlauf

$M_i = P_i/\omega$; $\omega = 2\pi n \longrightarrow M_i = P_i/2\pi n$ (1Ws = 1Nm)



$$M_{BC} = M_B = \frac{P_B}{2\pi n} = 3820\,\text{Nm}$$

$$M_{CD} = M_B - M_C = -\frac{P_D}{2\pi n} = -3340\,\text{Nm}$$

3. Wellendurchmesser

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \le \tau_{zul} \quad ; \quad W_t = \frac{\pi d^3}{16}$$

$$\vartheta = \frac{M_t}{GI_t} \le \vartheta_{zul} \quad ; \quad I_t = \frac{\pi d^4}{32}$$

5.8

$$d_{\tau_i} \ge \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}\frac{M_{ti}}{\tau_{zul}}} \quad \begin{cases} d_{\tau_{BC}} \ge 86{,}6\,\text{mm} \\ d_{\tau_{CD}} \ge 82{,}8\,\text{mm} \end{cases}$$

gewählte Durchmesser (n TGL 8250):

$$d_{\vartheta_i} \ge \sqrt[4]{\frac{32}{\pi}\frac{M_{ti}}{G\vartheta_{zul}}} \quad \begin{cases} d_{\vartheta_{BC}} \ge 103\,\text{mm} \\ d_{\vartheta_{CD}} \ge 99{,}5\,\text{mm} \end{cases} \qquad \begin{aligned} d_{BC} &= 110\,\text{mm} \\ d_{CD} &= 100\,\text{mm} \end{aligned}$$

4. Verdrehung des Rades C gegenüber Rad B

$$\varphi_{CB} = \varphi_C - \varphi_B$$

$$\frac{d\varphi}{dz}(z = 0 \dots l_1) = \frac{M_{CB}\, l_1}{GI_t(d_{CB})} = \text{konst}_1 \longrightarrow \varphi_C = \frac{M_{CB}\, l_1}{GI_t(d_{CB})} + \varphi_B$$

$$\varphi_{CB} = \frac{M_{CB}\, l_1}{GI_t(d_{CB})} = 3{,}7 \cdot 10^{-3} \mathrel{\hat=} 0{,}21^\circ$$

Verdrehung des Rades D gegenüber Rad B

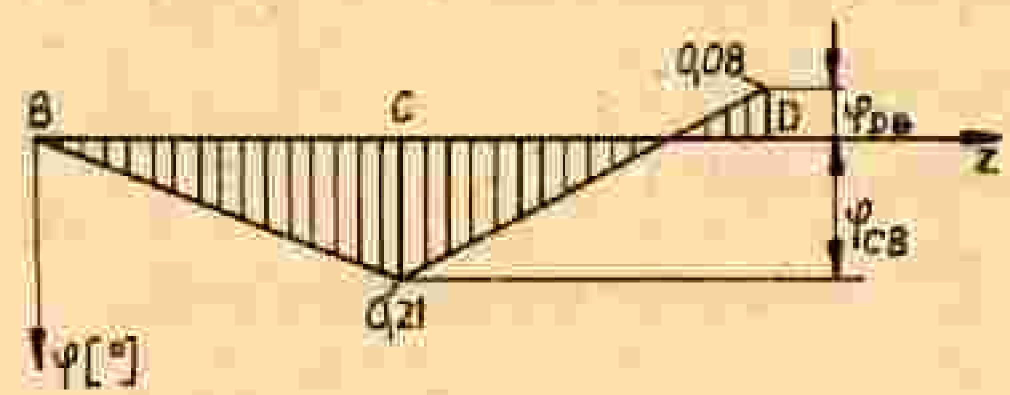
$$\varphi_{DB} = \varphi_D - \varphi_B$$

$$\frac{d\varphi}{dz}(z = 0 \dots l_2) = \frac{M_{CD}}{GI_t(d_{CD})} = \text{konst}_2 \longrightarrow \varphi_D = \frac{M_{CD}\, l_2}{GI_t(d_{CD})} + \varphi_C$$

$$\varphi_{DB} = \frac{M_{CD}\, l_2}{GI_t(d_{CD})} + \varphi_{CB} = -5{,}1 \cdot 10^{-3} + 3{,}7 \cdot 10^{-3} = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$$

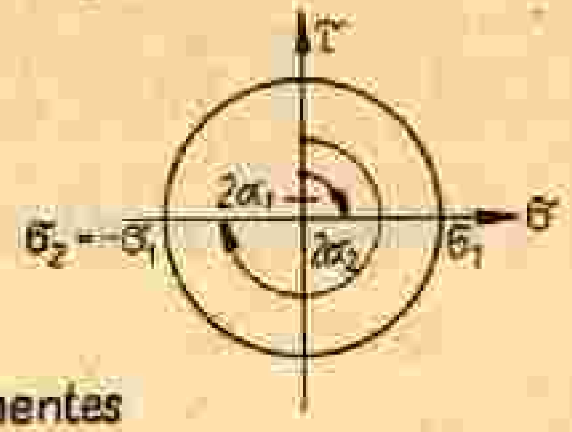
$$\mathrel{\hat=} 0{,}08^\circ$$

Verdrehwinkelverlauf (mit $\varphi_B = 0$)



$\boxed{5.9}$

1. Winkel der DMS zur Längsachse : 45° bzw. 135°
d.h. in Richtung der Hauptspannungen des reinen Schubspannungszustandes



2. Bestimmung des Torsionsmomentes

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} \quad ; \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}$$

Mohrscher Dehnungskreis: $\frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\sin 2\alpha$

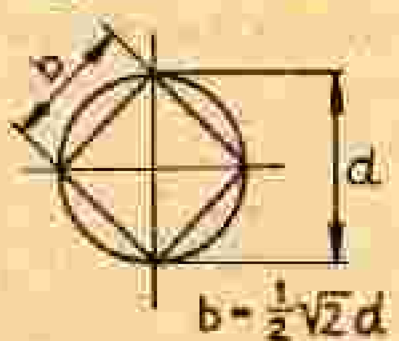
mit $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = |\varepsilon|$ und $\alpha = 45°$ folgt $\gamma_{xy} = 2|\varepsilon|$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot 2|\varepsilon| \quad ; \quad \tau_{xy} = \tau_{t\,Rand}$$

$$\rightarrow M_t = \tau_{t\,Rand} W_t = \frac{E|\varepsilon|}{(1+\mu)} \frac{\pi R^3}{2}$$

$\boxed{5.10}$

1. Torsionswiderstandsmoment und -trägheitsmoment



$W_{t\square} = \eta_2 ab^2$, $\eta_2 = 0{,}208$, $a = b$

$W_{t\square} = 0{,}208 b^3 = 0{,}0736\, d^3$

$W_{t\bigcirc} = \frac{\pi d^3}{16} = 0{,}1964\, d^3$

$W_{t\bigcirc} = \frac{\pi d^3}{16} = 0{,}0694\, d^3$ (einbeschriebener Kreis)

$\boxed{5.10}$

$W_{t\square} : W_{t\bigcirc} = 0{,}375 : 1$ (umschriebener Kreis)
$= 1{,}06 : 1$ (einbeschriebener Kreis)

$I_{t\square} = \eta_3 ab^3$, $\eta_3 = 0{,}140$; $a = b$

$I_{t\square} = 0{,}140 b^4 = 0{,}0350\, d^4$

$I_{t\bigcirc} = \frac{\pi d^4}{32} = 0{,}0982\, d^4$

$I_{t\bigcirc} = \frac{\pi d^4}{32} = 0{,}0245\, d^4$ (einbeschriebener Kreis)

$I_{t\square} : I_{t\bigcirc} = 0{,}356 : 1$ (umschriebener Kreis)
$= 1{,}43 : 1$ (einbeschriebener Kreis)

2. Erforderlicher Durchmesser

$$\tau_{t\,max} = \frac{M_t}{W_{t\square}} \le \tau_{t\,zul} \rightarrow d_{erf}^3 \ge \frac{M_t}{0{,}0736\,\tau_{t\,zul}} \rightarrow d_{erf} \ge 34{,}4\,\text{mm}$$

Nachrechnung für die Verdrehung: $\varphi_{AB} = M_t\left[\left(\frac{l}{GI_t}\right)_\square + \left(\frac{l}{GI_t}\right)_\bigcirc\right]$

$$\rightarrow d_{erf}^4 \ge \frac{M_t}{G\,\varphi_{zul}}\left(\frac{l_\square}{0{,}035} + \frac{l_\bigcirc}{0{,}0982}\right) \rightarrow d_{erf} \ge 62{,}1\,\text{mm}$$

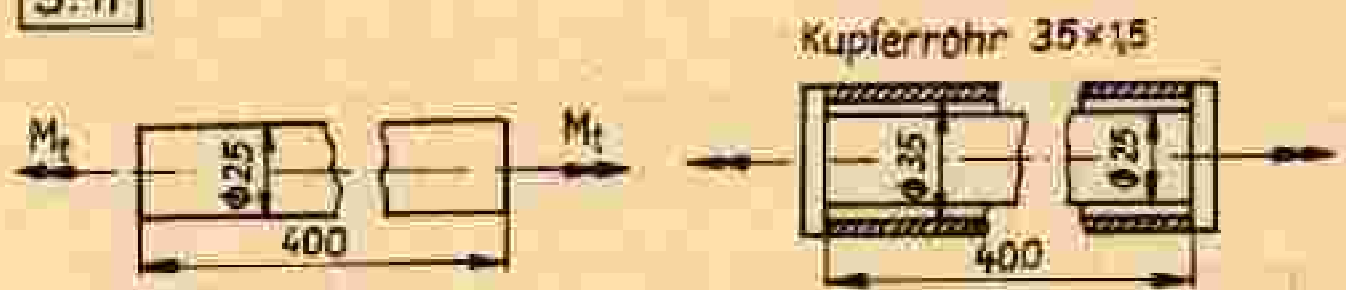
mit $E = 2 \cdot 10^5\,\text{Nmm}^{-2}$ und $\mu = 0{,}3$ für Stahl

Es wird Rundstahl ϕ 63 benötigt, das Quadrat hat dann die Kantenlänge 45 mm.

$$d_{erf}^4 = \frac{3 \cdot 10^5}{7{,}7 \cdot 10^4} \cdot \frac{180}{\pi \cdot 0{,}1}\left(\frac{150}{0{,}035} + \frac{250}{0{,}0982}\right) = 15{,}25 \cdot 10^6$$

$d_{erf} = 62{,}5\,\text{mm}$

5.11



Anordnung 1: Stahlwelle

Anordnung 2: Stahlwelle und Kupferrohr über Scheiben starr miteinander verbunden

1. Anordnung 1

1.1 Max. Schubspannung

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_{t\,min}} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{2}R^3} = \frac{200\cdot 10^3\,\text{Nmm}}{\frac{\pi}{2}(12{,}5)^3\,\text{mm}^3} = 65{,}1\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

1.2 Verdrehung

Einheitsverdrehung

$$\vartheta = \frac{M_t}{G I_t} = \frac{M_t}{G\frac{\pi}{2}R^4} = \frac{200\cdot 10^3\,\text{Nmm}}{8\cdot 10^4\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\cdot\frac{\pi}{2}(12{,}5)^4\,\text{mm}^4} = 6{,}52\cdot 10^{-5}\,\text{mm}^{-1}$$

Gesamtverdrehung

$$\varphi = \int_0^l \vartheta\,dx = \vartheta\cdot l = 2{,}61\cdot 10^{-2} \quad \text{bzw}\quad \varphi = 1{,}5^\circ$$

2. Anordnung 2

2.1 Verteilung des Torsionsmomentes auf Stahlwelle und Kupferrohr

a) $\vartheta_{St}\cdot l = \vartheta_{Cu}\cdot l \;\longrightarrow\; \vartheta_{St} = \vartheta_{Cu} \;\longrightarrow\; \dfrac{M_{t\,St}}{G_{St}\cdot I_{t\,St}} = \dfrac{M_{t\,Cu}}{G_{Cu}\cdot I_{t\,Cu}}$

b) $M_t = M_{t\,St} + M_{t\,Cu}$

5.11

aus a) $M_{t\,St} = M_{t\,Cu}\,\dfrac{G_{St}\cdot I_{t\,St}}{G_{Cu}\cdot I_{t\,Cu}}$

in b) eingesetzt:

$$M_t = M_{t\,Cu}\cdot\frac{G_{St}\cdot I_{t\,St}}{G_{Cu}\cdot I_{t\,Cu}} + M_{t\,Cu} = M_{t\,Cu}\left(\frac{G_{St}\cdot I_{t\,St}}{G_{Cu}\cdot I_{t\,Cu}} + 1\right)$$

$$= M_{t\,Cu}\left(\frac{8\cdot 10^4\cdot\frac{\pi}{2}R^4}{4{,}8\cdot 10^4\cdot\frac{\pi}{2}(R_a^4 - R_i^4)} + 1\right)$$

$$= M_{t\,Cu}\left(\frac{8\cdot 10^4\;\frac{\pi}{2}(12{,}5)^4}{4{,}8\cdot 10^4\;\frac{\pi}{2}(17{,}5^4 - 16{,}0^4)} + 1\right) = M_{t\,Cu}\left(\frac{3{,}07\cdot 10^5}{2{,}13\cdot 10^5} + 1\right)$$

$$= 2{,}44\,M_{t\,Cu} \longrightarrow M_{t\,Cu} = 0{,}41\,M_t$$

aus b) $M_{t\,St} = M_t - M_{t\,Cu} = 0{,}59\,M_t$

2.2 Maximale Schubspannungen

2.2.1 In der Stahlwelle

$$\tau_{t\,max\,St} = \frac{M_{t\,St}}{W_{t\,St}} = \frac{M_{t\,St}}{\frac{\pi}{2}R^3} = \frac{0{,}59\cdot 200\cdot 10^3\,\text{Nmm}}{\frac{\pi}{2}(12{,}5)^3\,\text{mm}^3} = 38{,}4\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

2.2.2 Im Kupferrohr

$$\tau_{t\,max\,Cu} = \frac{M_{t\,Cu}}{W_{t\,Cu}} = \frac{M_{t\,Cu}}{\frac{\pi}{2}(R_a^4 - R_i^4)} = \frac{0{,}41\cdot 200\cdot 10^3\,\text{Nmm}}{\frac{\pi}{2}\frac{(17{,}5^4 - 16^4)}{17{,}5}} = 32{,}4\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

2.3 Verdrehung der Wellenenden gegeneinander

$$\varphi = \int_0^l \vartheta\,dx = \int_0^l \frac{M_{t\,St}}{G_{St}\cdot I_{t\,St}}\,dx = \int_0^l \frac{M_{t\,Cu}}{G_{Cu}\cdot I_{t\,Cu}}\,dx$$

$$= \frac{M_{t\,St}\cdot l}{G_{St}\cdot I_{t\,St}} = \frac{0{,}59\cdot 200\cdot 10^3\,\text{Nmm}\cdot 400\,\text{mm}}{8\cdot 10^4\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\cdot\frac{\pi}{2}(12{,}5)^4\,\text{mm}^4} = 1{,}54\cdot 10^{-2}$$

$\varphi = 0{,}883^\circ$

$\boxed{5.12}$

Torsionsmoment : $M_t = 2r_a F$

Torsionsträgheitsmoment : $I_t = \frac{\pi}{2}(r_a^4 - r_i^4)$

Torsionswiderstandsmoment : $W_t = \frac{\pi}{2r_a}(r_a^4 - r_i^4)$

1. Verdrehwinkel $\varphi(a) = \int_0^l \vartheta(x)\,dx = \vartheta e$

$$\vartheta = \frac{M_t}{G I_t} = \frac{2r_a F}{G\frac{\pi}{2}(r_a^4 - r_i^4)} = \frac{4r_a F}{G\pi(r_a^4 - r_i^4)}$$

$$\varphi(a) = \vartheta e = \frac{4r_a F}{G\pi(r_a^4 - r_i^4)}\, e$$

2. Maximale Schubspannung $\tau_{tmax} = \frac{M_t}{W_t}$

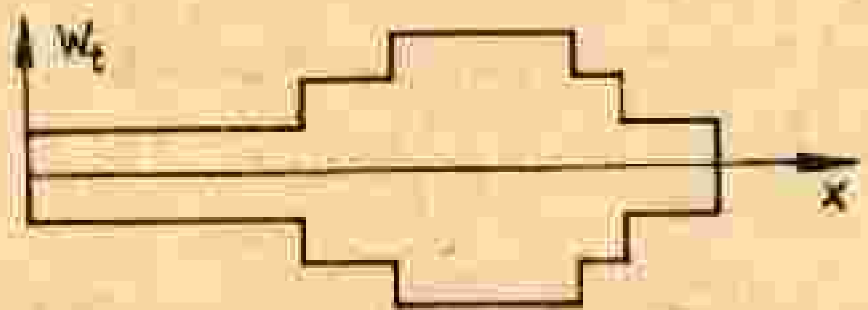
$$\tau_{tmax} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{4Fr_a^2}{\pi(r_a^4 - r_i^4)}$$

$\boxed{5.13}$

Torsionsmoment : $M_t = M_o$

Torsionsträgheitsmoment : $I_t = \frac{\pi}{32} d^4$

Torsionswiderstandsmoment : $W_t = \frac{\pi}{16} d^3$



$\boxed{5.13}$

1. Verlauf der maximalen Schubspannungen

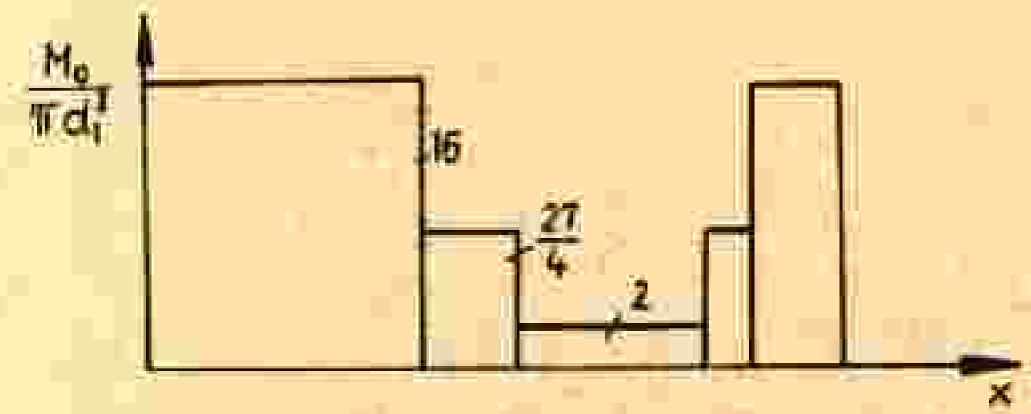
$$\mathrm{I}:\ \tau_{tmax_{I}} = \frac{M_o}{\frac{\pi}{16}d_1^3} = \frac{16M_o}{\pi d_1^3}$$

$$\mathrm{II}:\ \tau_{tmax_{II}} = \frac{16M_o}{\pi d_2^3} = \frac{27}{4}\frac{M_o}{\pi d_1^3}$$

$$\mathrm{III}:\ \tau_{tmax_{III}} = \frac{16M_o}{\pi d_3^3} = \frac{2M_o}{\pi d_1^3}$$

$$\mathrm{IV}:\ \tau_{tmax_{IV}} = \tau_{tmax_{II}} = \frac{27}{4}\frac{M_o}{\pi d_1^3}$$

$$\mathrm{V}:\ \tau_{tmax_{V}} = \tau_{tmax_{I}} = \frac{16M_o}{\pi d_1^3}$$



2. Verlauf des Verdrehwinkels

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{M_t}{GI_t}\,dx$$

$$\mathrm{I}: 0 \le x \le 3a \quad \varphi(x) = \frac{32M_o}{G\pi d_1^4}\,x$$

$$\mathrm{II}: 3a \le x \le 4a \quad \varphi(x) = \frac{32M_o}{G\pi d_1^4}\cdot 3a + \frac{32M_o}{G\pi d_2^4}\,x$$

$$= \frac{96aM_o}{G\pi d_1^4} + \frac{81}{8}\frac{M_o}{G\pi d_1^4}$$

5.13

III: $4a \le x \le 6a \quad \varphi(x) = \frac{96 M_0}{G\pi d_1^4}\, a + \frac{81}{8}\frac{M_0}{G\pi d_1^4}\, a + \frac{32 M_0}{G\pi d_2^4}\, x$

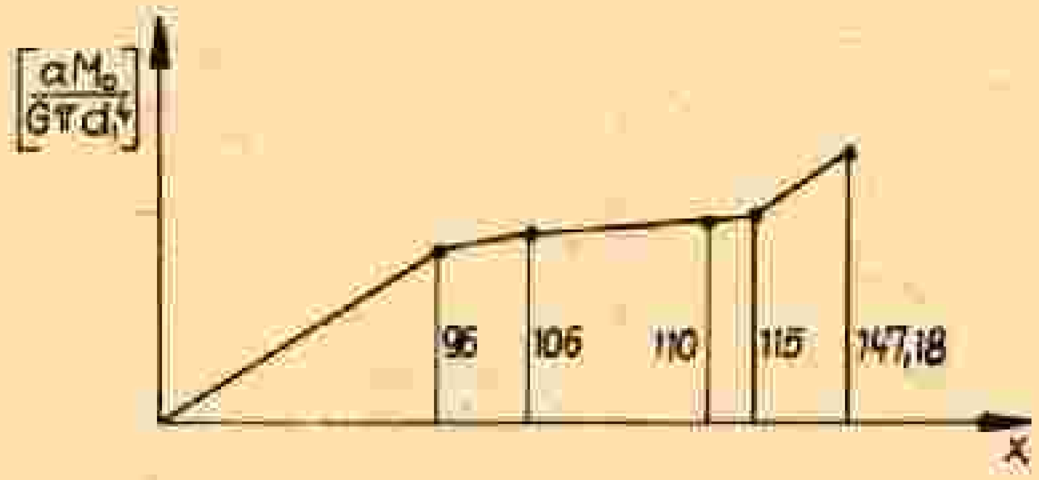
$$= \frac{849}{8}\frac{a M_0}{G\pi d_1^4} + \frac{2 M_0}{G\pi d_1^4}\, x$$

IV: $6a \le x \le 6{,}5a \quad \varphi(x) = \frac{849}{8}\frac{a M_0}{G\pi d_1^4} + \frac{2 M_0}{G\pi d_1^4}\cdot 2a + \frac{32 M_0}{G\pi d_2^4}\, x$

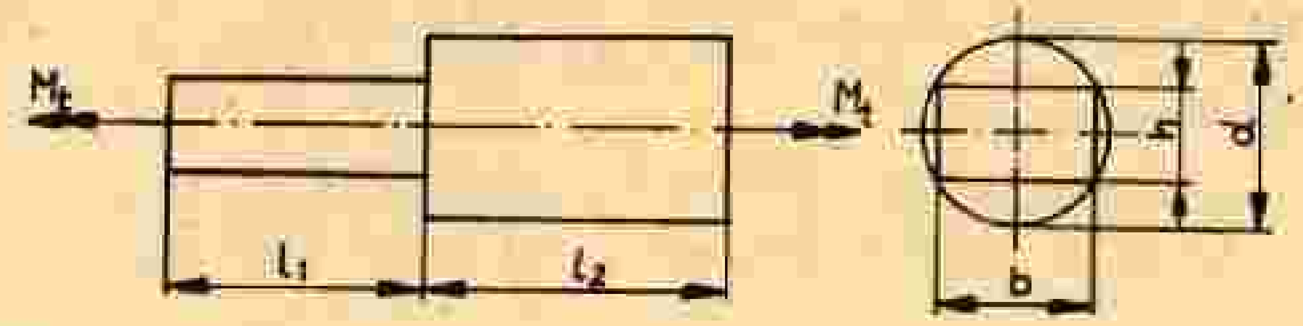
$$= \frac{881}{8}\frac{a M_0}{G\pi d_1^4} + \frac{81}{8}\frac{M_0}{G\pi d_1^4}\, x$$

V: $6{,}5a \le x \le 7{,}5a \quad \varphi(x) = \frac{881}{8}\frac{a M_0}{G\pi d_1^4} + \frac{81}{8}\frac{M_0}{G\pi d_1^4}\,\frac{a}{2} + \frac{32 M_0}{G\pi d_1^4}\, x$

$$= \frac{1843}{16}\frac{a M_0}{G\pi d_1^4} + \frac{32 M_0}{6\pi d_1^4}\, x$$



5.14



1. Durchmesser der Welle

maximale Torsionsschubspannung im Rechteckquerschnitt

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} = \tau_{zul} \quad ; \quad W_t = \eta_2\, b h^2$$

$$b/h = 2, \quad \text{d.h.} \quad \eta_2 = 0{,}246$$

$$\tau_{zul} = \frac{M_t}{\eta_2 \cdot 2h^3}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{zul}\cdot \eta_2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\frac{5000\ \mathrm{Ncm}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm}^2}{30\,\mathrm{N}\cdot 0{,}246\cdot 2}} = 1{,}5\,\mathrm{cm}$$

$$b = 2h = 3\,\mathrm{cm}$$

$$d = 2\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{4}} = 2\sqrt{\frac{3^2\,\mathrm{cm}^2 + 1{,}5^2\,\mathrm{cm}^2}{4}} = 3{,}35\,\mathrm{cm}$$

2. Verdrehwinkel φ

$$\varphi = \int_0^{l_1} \frac{M_t}{G I_{tR}}\, dz + \int_{l_1}^{l_2} \frac{M_t}{G I_{tK}}\, dz$$

Rechteckquerschnitt: $I_{tR} = \eta_3\, b h^3$

$b/h = 2$, d.h. $\eta_3 = 0{,}229$; $I_{tR} = 0{,}229 \cdot 2 \cdot 1{,}5^4\ \mathrm{cm}^4$

5.14

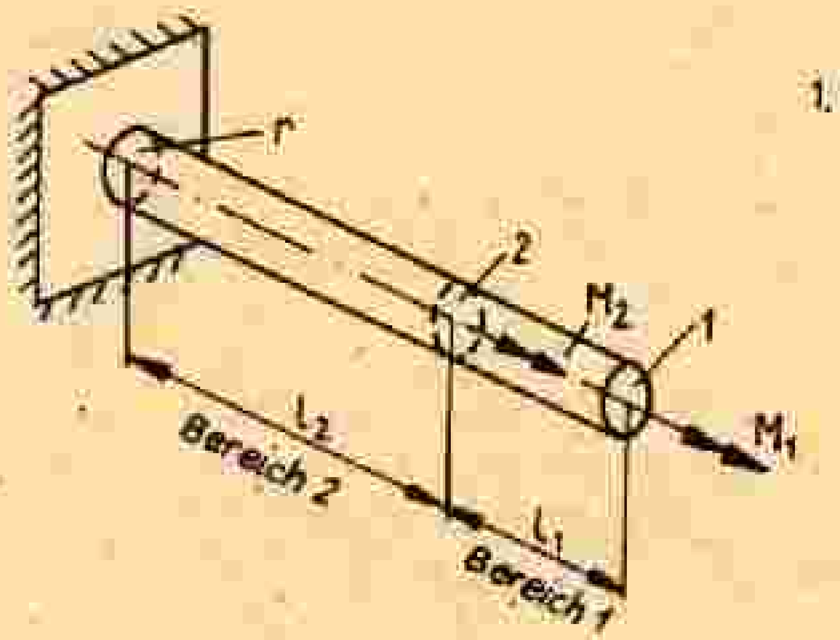
Kreisquerschnitt: $I_t = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 3{,}35^4\,cm^4}{32}$

Verdrehwinkel:

$$\varphi = \frac{5000\,Ncm \cdot 40\,cm \cdot 10^{-2}\,cm^2}{8{,}1 \cdot 10^4\,N \cdot 0{,}229 \cdot 2 \cdot 1{,}5^4\,cm^4} + \frac{5000\,Ncm \cdot 80\,cm \cdot 10^{-2}\,cm^2\,32}{8{,}1 \cdot 10^4\,N \cdot \pi \cdot 3{,}35^4\,cm^4}$$

$$\varphi = 1{,}46 \cdot 10^{-2}$$

5.15



1. Berechnung von τ_{max}

Bereich 1:

$$\tau_{max_1} = \frac{M_1}{W_t}$$

$$\tau_{max_1} = \frac{2\,M_1}{\pi\, r^3}$$

Bereich 2:

$$\tau_{max_2} = \frac{M_1 + M_2}{W_t} = \frac{2\,(M_1 + 2M_1)}{\pi\, r^3} = \frac{6\,M_1}{\pi\, r^3}$$

$$\tau_{max} = \tau_{max_2} = \frac{6\,M_1}{\pi\, r^3} \quad ; \quad W_t = \frac{\pi}{2} r^3$$

2. Berechnung von φ_1 und φ_2

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_t}{G\, I_t}\, dz \quad ; \quad I_t = \frac{\pi}{2} r^4$$

Bereich 2:

$$\varphi_2 = \int_0^{l_2} \frac{2\,(M_1 + M_2)}{G\,\pi\, r^4}\, dz = \frac{12\,M_1\, l_1}{G\,\pi\, r^4}$$

Bereich 1:

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \bar{\varphi}_1 \quad ; \quad \bar{\varphi}_1 = \int_{l_2}^{l_1 + l_2} \frac{M_1}{G\, I_t}\, dz = \frac{M_1\, l_1}{G\, I_t}$$

$$\varphi_1 = \frac{12\,M_1\, l_1}{G\,\pi\, r^4} + \frac{2\,M_1\, l_1}{G\,\pi\, r^4} = \frac{14\,M_1\, l_1}{G\,\pi\, r^4}$$

5.16

1. Verdrehwinkel

$$\varphi = \frac{M_t}{c_d} = 300\,Nm \cdot 0{,}00124\,{}^\circ/Nm$$

$$\varphi = 3{,}7^\circ$$

2. Drehfedernachgiebigkeit

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_t}{G\, I_t}\, dz = \frac{M_t\, l}{G\, I_t}$$

$$\frac{M_t}{c_R} = \frac{M_t}{G\, I_t} \cdot l \quad ; \quad \frac{1}{c_R} = \frac{l}{G\, I_t}$$

Berechnung von I_t (dünnwandig):

$$I_t = \frac{4\,A_m^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}} = \frac{4\,A_m^2}{\frac{2\,r_m\,\pi}{\delta}} = \frac{4(\pi \cdot 38{,}5^2\,mm^2)^2}{\frac{2 \cdot 38{,}5\,mm \cdot \pi}{3\,mm}} = 1{,}0756 \cdot 10^6\,mm^4$$

5.16

$$\frac{1}{c_R} = \frac{956\ \text{mm}}{7{,}9\cdot 10^4\,\text{N mm}^{-2}\cdot 10756\cdot 10^6\,\text{mm}^4} = 1{,}1256\cdot 10^{-8}\ \frac{1}{\text{Nmm}}$$

$$\frac{1}{c_R} = \frac{1{,}1256\cdot 10^{-5}\cdot 180^\circ}{\text{Nm}\cdot\pi} = 0{,}000644\ ^\circ/\text{Nm}$$

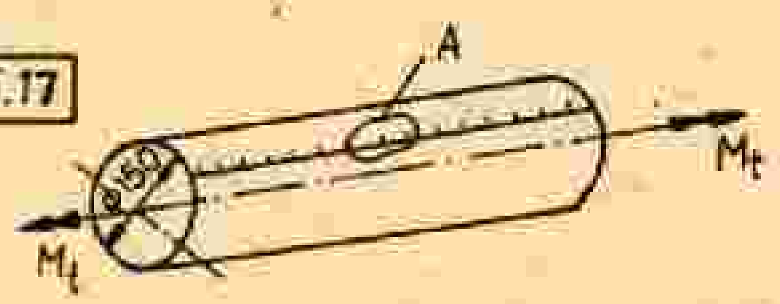
das sind 52% von $\frac{1}{c_d}$

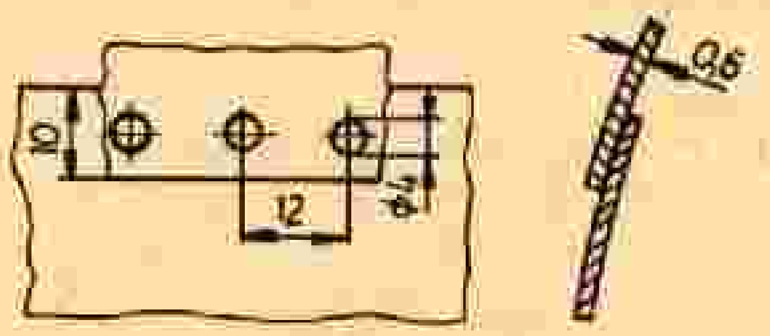
3. Torsionsschubspannung

$$W_t = 2\,A_m\,\delta_{min} = 2\cdot\pi\cdot 38{,}5^2\ \text{mm}^2\cdot 3\,\text{mm}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{3\cdot 10^6\ \text{Nmm}}{2\cdot\pi\cdot 38{,}5^2\,\text{mm}^2\cdot 3\,\text{mm}} = 107{,}37\ \text{N mm}^{-2}$$

5.17





1. Scherzugkraft pro Schweißpunkt

1.1 Schweißspannung

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{2\,A_u\cdot t} = \frac{1{,}2\cdot 10^6\,\text{Nmm}}{2\cdot\pi\,R^2\cdot 0{,}6\ \text{mm}}$$

$$= \frac{1{,}2\cdot 10^6\ \text{Nmm}}{2\pi\,(75)^2\cdot 0{,}6\,\text{mm}^3} = 56{,}6\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

5.17

1.2 Scherzugkraft

$$F_p = \tau_t\cdot 0{,}6\,\text{mm}\cdot 12\,\text{mm} = 0{,}41\cdot 10^3\,\text{N}$$

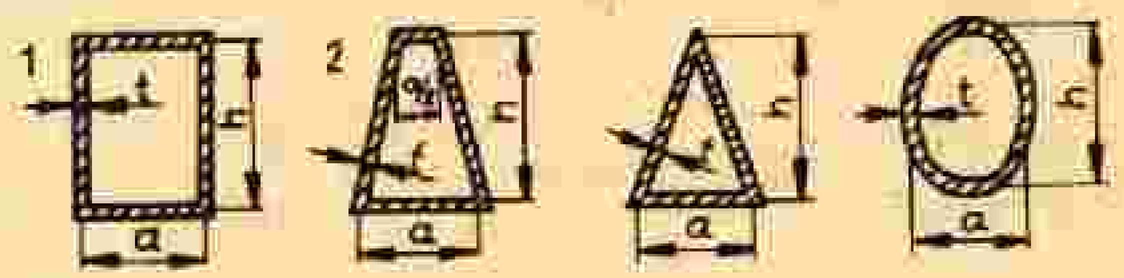
Es ist: $F_p = 0{,}41\cdot 10^3\ \text{N} < 2\cdot 10^3\ \text{N}$

2. Einheitsverdrehung

$$\vartheta = \frac{M_t}{G\,I_t} = \frac{M_t}{G\cdot\frac{4A_u^2}{\oint\frac{ds}{t}}} = \frac{M_t}{G\,\frac{4(\pi R^2)^2}{\frac{2\pi R}{t}}} = \frac{M_t}{G\cdot 2\,\pi R^3 t}$$

$$= \frac{1{,}2\cdot 10^6\ \text{Nmm}}{8\cdot 10^4\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\,2\pi\cdot 75^3\cdot 0{,}6\,\text{mm}^4} = 9{,}43\cdot 10^{-6}\,\text{mm}^{-1} \mathrel{\hat{=}} 0{,}54\ ^\circ/\text{m}$$

5.18



1. Schubspannungen

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{2\,A_u\,t}$$

$$\tau_{t_1} = \frac{M_t}{2\cdot a\cdot h\cdot t} = \frac{4{,}8\cdot 10^4\ \text{Nmm}}{2\cdot 24\cdot 30\cdot 1{,}5\,\text{mm}^3} = 22{,}22\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

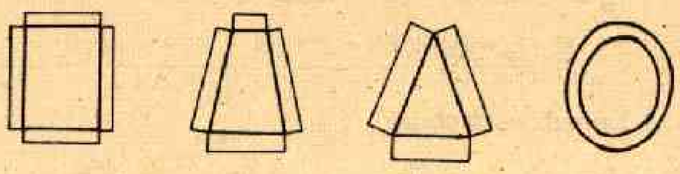
$$\tau_{t_2} = \frac{M_t}{2\,(a\cdot h - \frac{a}{4}h)\cdot t} = 29{,}63\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{t_3} = \frac{M_t}{2\cdot\frac{a\,h}{2}\cdot t} = 44{,}44\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{t_4} = \frac{M_t}{2\cdot\pi\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot t} = 28{,}29\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

5.18

2. Verteilung der Schubspannungen



3. Verdrehwinkel zwischen den Endquerschnitten

3.1 Trägheitsmoment

$$I_t = \frac{4\,A_u^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}}$$

$$I_{t_1} = \frac{4\,(ah)^2}{2 \cdot \frac{a+h}{t}} = 28{,}8 \cdot 10^3\,mm^4$$

$$I_{t_2} = \frac{4\left(ah - \frac{a}{4}h\right)^2}{\frac{a + \frac{a}{2} + 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2}}{t}} = 18{,}00 \cdot 10^3\,mm^4$$

$$I_{t_3} = \frac{4\left(\frac{a \cdot h}{2}\right)^2}{\frac{a + 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{t}} = 8{,}77 \cdot 10^3\,mm^4$$

$$I_{t_4} = \frac{4\left(\pi \frac{h}{2}\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{U_{Ellipse}}{t}} = 22{,}55 \cdot 10^3\,mm^4 \qquad U_{Ellipse} \approx \pi\left[\frac{3}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{h}{2}\right) - \sqrt{\frac{a}{2}\frac{h}{2}}\right]$$

3.2 Einheitsverdrehung ϑ und Gesamtverdrehung φ

$$\vartheta = \frac{M_t}{G\,I_t} \qquad \varphi = \int_0^x \vartheta\,dx$$

$$\vartheta_1 = \frac{M_t}{G \cdot I_{t_1}} = 2{,}07 \cdot 10^{-5}\,mm^{-1} \qquad \varphi_1 = \vartheta_1\,l = 2{,}07 \cdot 10^{-2}$$

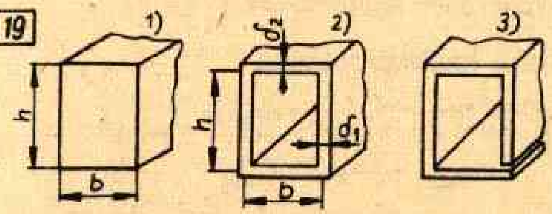
5.18

$$\vartheta_2 = \frac{M_t}{G\,I_{t_2}} = 3{,}31 \cdot 10^{-5}\,mm^{-1} \qquad \varphi_2 = \vartheta_2\,l = 3{,}31 \cdot 10^{-2}$$

$$\vartheta_3 = \frac{M_t}{G\,I_{t_3}} = 6{,}78 \cdot 10^{-5}\,mm^{-1} \qquad \varphi_3 = \vartheta_3\,l = 6{,}78 \cdot 10^{-2}$$

$$\vartheta_4 = \frac{M_t}{G\,I_{t_4}} = 2{,}62 \cdot 10^{-5}\,mm^{-1} \qquad \varphi_4 = \vartheta_4\,l = 2{,}62 \cdot 10^{-2}$$

5.19



1. Torsionsmoment

$$M_t = W_t\,\tau_t = G \cdot I_t \cdot \vartheta$$

1.1 Widerstandsmoment

$$W_{t_1} = \eta_2\,hb^2 = 0{,}231 \cdot hb^2 = 17{,}74 \cdot 10^4\,mm^3$$

$$W_{t_2} = 2 \cdot A_u \cdot t_{min} = 2hb\delta_1 = 11{,}52 \cdot 10^4\,mm^3$$

$$W_{t_3} = \frac{\frac{1}{3}\left(2h\delta_1^3 + 2b\delta_2^3\right)}{\delta_{max}} = 9{,}12 \cdot 10^3\,mm^3$$

1.2 Flächenträgheitsmoment

$$I_{t_1} = \eta_3\,hb^3 = 0{,}196 \cdot hb^3 = 12{,}04 \cdot 10^6\,mm^4$$

$$I_{t_2} = \frac{4\,A_u^2}{\oint \frac{ds}{\delta_1}} = \frac{4\,(hb)^2}{2\frac{h}{\delta_1} + 2\frac{b}{\delta_2}} = 6{,}91 \cdot 10^6\,mm^4$$

$$I_{t_3} = \frac{1}{3}\left(2h\delta_1^3 + 2b\delta_2^3\right) = 10{,}94 \cdot 10^4\,mm^4$$

$\boxed{5.19}$

1.3 zulässiges Torsionsmoment

$$M_{t\,zul} = W_t \cdot \tau_{t\,zul} \quad , \quad M_{t\,zul} = G \cdot I_t \cdot \vartheta_{zul}$$

$M_{t\,zul}$ [Nm]	nach $\tau_{t\,zul}$	nach ϑ_{zul}
1)	$5{,}31 \cdot 10^3$	$5{,}85 \cdot 10^3$
2)	$3{,}45 \cdot 10^3$	$3{,}36 \cdot 10^3$
3)	$2{,}73 \cdot 10^2$	$5{,}31 \cdot 10^1$

2. Vergleich Vollprofil – Kastenprofil

2.1 Erforderliche Kastenprofilhöhe

$$M_{t\,zul.1} = 5{,}85 \cdot 10^3\,\text{Nm} = M_{t\,zul.2} = W_{t\,2} \cdot \tau_{t\,zul}$$

$$M_{t\,zul1} = 2hb\delta_1 \; \tau_{t\,zul.}$$

$$= 2h \cdot \frac{2}{3}h \cdot \frac{1}{20}h \cdot \tau_{t\,zul.}$$

$$= \frac{1}{15}h^3 \cdot \tau_{t\,zul}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{15\,M_{t\,zul\,1}}{\tau_{t\,zul.}}} = \sqrt[3]{\frac{15 \cdot 5{,}31 \cdot 10^6\,\text{Nmm}}{30\,\text{Nmm}^2}}$$

$$h_z = 138{,}5\,\text{mm}$$

2.2 Gewichtseinsparung

Gewicht $G = m \cdot g = \varrho \cdot v \cdot g$

$$\frac{G_{\square}}{G_{\boxdot}} = \frac{\varrho \cdot h \cdot b \cdot l \cdot g}{\varrho(2b\delta_2 + 2h\delta_1)\,l \cdot g} = \frac{h \cdot b}{(2 \cdot \frac{2}{3}h_2 \cdot \frac{1}{10}h_2 + 2h_2\,\frac{1}{20}h_2)}$$

$$= \frac{120 \cdot 80}{(2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 138{,}5\;\frac{1}{10} \cdot 138{,}5 + 2 \cdot 138{,}5 \cdot \frac{1}{20}\,138{,}5)} = \frac{9600}{4476}$$

Die Gewichtseinsparung beträgt damit 53 %

$\boxed{5.20}$

1. Berechnung der Einspannmomente

$$M_A + M_B = M_t$$

außerdem gilt : $\varphi(A) = \varphi(B)$

mit $\varphi(A) = \dfrac{M_A}{G\frac{\pi}{32}d_1^4}\,l_1$

$$\varphi(B) = \frac{M_B}{G\frac{\pi}{32}d_2^4}\,l_2$$

daraus ergibt sich : $M_A = M_B\,\dfrac{l_2}{l_1}\,\dfrac{d_1^4}{d_2^4}$

durch Einsetzen in die obige Gleichung erhält man:

$$M_B\,\frac{l_2}{l_1}\,\frac{d_1^4}{d_2^4} + M_B = M_t$$

$$M_B = \frac{M_t}{1 + \frac{l_2}{l_1}\,\frac{d_1^4}{d_2^4}}$$

$$M_A = \frac{M_t}{1 + \frac{l_1}{l_2}\,\frac{d_2^4}{d_1^4}}$$

2. Berechnung von $\varphi(C)$

$$\varphi(C) = \vartheta_A l_1 = \vartheta_B l_2 = \frac{M_B}{G\frac{\pi}{32}d_2^4} = \frac{32\,M_t}{G\pi\left(\frac{d_2^4}{l_2} + \frac{d_1^4}{l_1}\right)}$$

$\boxed{5.21}$

$$I_{t\omega} = \frac{\eta}{3}\sum l_i d_i^3 \qquad \text{mit } \eta = 1{,}2$$

$$= \frac{\eta}{3}\left[(2c+d)d^3 + (2b-d)d^3 + (2b-d)d^3\right]$$

$$= \frac{\eta}{3}(2c+4b-d)d^3 \qquad d^4 \text{ kann vernachlässigt werden}$$

$$= \frac{2\eta}{3}(c+2b)d^3$$

$$W_{t\omega} = \frac{I_{t\omega}}{\delta_{max}} = \frac{2\eta}{3}(c+2b)d^2$$

$$I_{t\square} = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}} \qquad \text{mit } A_m = 2bc$$

$$\oint \frac{ds}{\delta(s)} = \frac{1}{d}(4c+2b)$$

$$= \frac{16c^2b^2d}{2(2c+b)} = \frac{8c^2b^2d}{2c+b}$$

$$W_{t\square} = 2A_m\,\delta_{min} = 4cbd$$

$$\tau_{t\,max} = \frac{M_t}{W_t}$$

$$\frac{\tau_{t\,max\,\omega}}{\tau_{t\,max\,\square}} = \frac{6cb}{\eta d(c+2b)}$$

$$\vartheta = \frac{M_t}{GI_t}$$

$$\frac{\vartheta_\omega}{\vartheta_\square} = \frac{12c^2b^2}{\eta(2c+b)(c+2b)d^2}$$