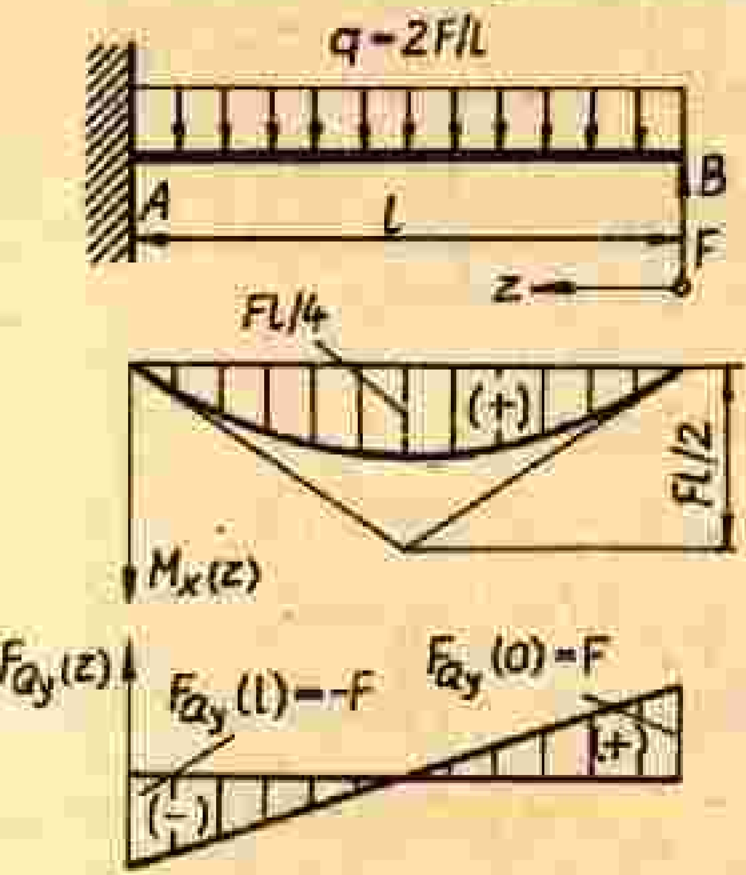
1. Biegespannungen

1.1 Verlauf von Biegemoment und Querkraft



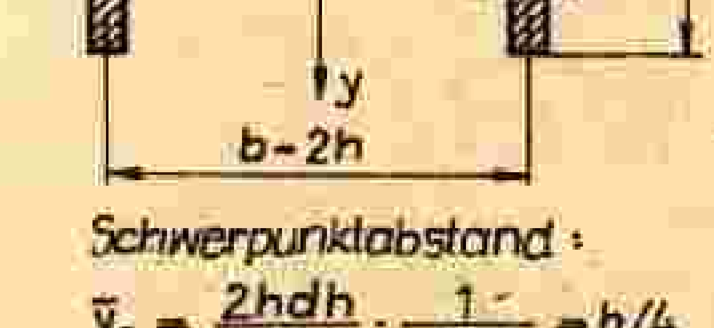
$$M_x(z) = Fz - \frac{qz^2}{2} = Fz - \frac{2Fz^2}{l\,2} = Fz\left(1 - \frac{z}{l}\right)$$

$$M_{x\,max} = M_x(l/2) = Fl/4$$

$$F_{Qy}(z) = \frac{dM(z)}{dz} = F\left(1 - \frac{2z}{l}\right)$$

$$|F_{Qy\,max}| = F$$

1.2 Querschnittsparameter



Für $d \ll h$ gilt näherungsweise:

Querschnittsfläche:

$$A = (b + 2h)d = 4hd$$

Schwerpunktabstand:

$$\bar{y}_S = \frac{2hd\,h}{2} \cdot \frac{1}{4hd} = h/4$$

Trägheitsmoment:

$$J_{xx} = \frac{2dh^3}{3} - A\bar{y}_S^2 = \frac{2}{3}dh^3 - 4hd\frac{h^2}{16} = \frac{5}{12}dh^3$$

6.1

Widerstandsmoment:

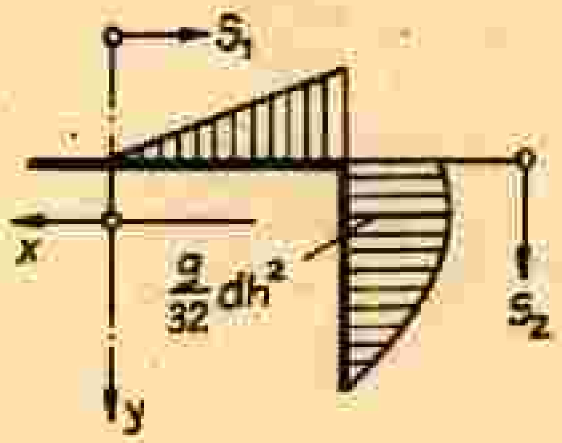
$$W_x = \frac{J_{xx}}{h-\bar{y}_S} = \frac{5dh^3}{12(h-h/4)} = \frac{5}{9}dh^2$$

1.3 Maximale Biegespannung

$$|\sigma_{z\,max}| = \frac{M_x}{W_x} = \frac{Fl/4}{5/9\cdot dh^2} = \frac{9Fl}{20dh^2}$$

2. Schubspannungen

2.1 Verlauf der statischen Momente



$$S_{x1}(s_1) = ds_1\bar{y}_S = d\frac{h}{4}s_1$$

$$S_{x1}(b/2) = \frac{1}{4}dh^2$$

$$S_{x2}(s_2) = \frac{1}{4}dh^2 + ds_2(\bar{y}_S - s_2/2)$$

$$= \frac{1}{4}dh^2 + ds_2(h/4 - s_2/2)$$

$$S_{x\,max} = S_{x2}(h/4) = \frac{9}{32}dh^2$$

2.2 Maximale Querkraftschubspannung

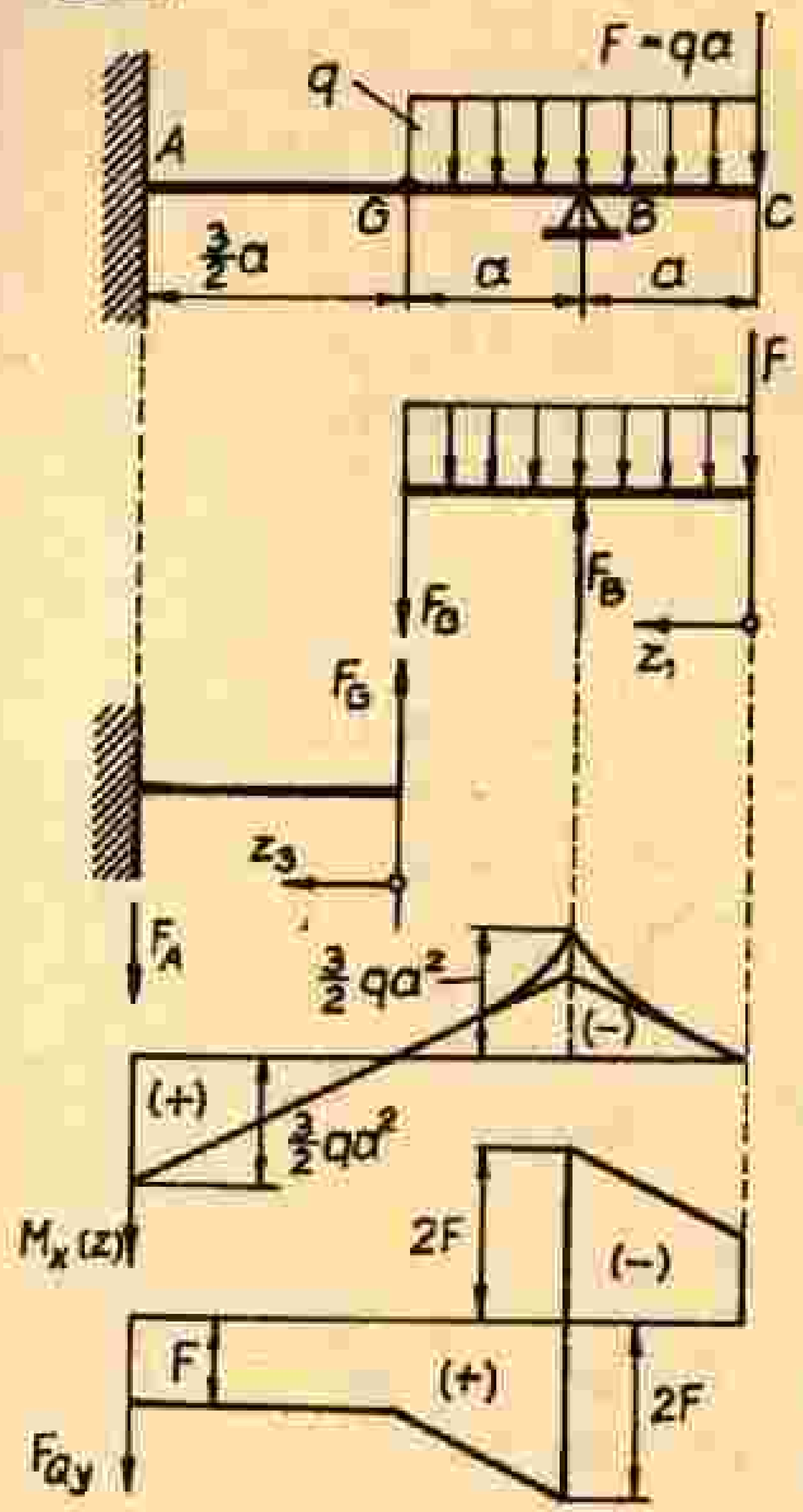
$$|\tau_{max}| = \frac{F_{Qy\,max}\,S_{x\,max}}{J_{xx}\,d} = \frac{9/32\cdot Fdh^2}{5/12\,d^2h^3} = \frac{27}{40}\frac{F}{dh}$$

3. Verhältnis $|\tau_{max}/\sigma_{z\,max}|$

$$\left|\frac{\tau_{max}}{\sigma_{z\,max}}\right| = \frac{27F}{40dh}\cdot\frac{20dh^2}{9Fl} = \frac{3}{2}\frac{h}{l}$$

l/h	2	5	10
$\left\vert\frac{\tau_{max}}{\sigma_{z\,max}}\right\vert$	0,75	0,30	0,15

6.2



1. Biegespannungen

1.1 Lagerreaktionen

$\sum F_y = 0:\ 2qa + qa + F_G - F_B = 0$

$\sum M_{xG} = 0:\ 2qa^2 + q\frac{(2a)^2}{2} - F_B a = 0$

$F_B = 4qa = 4F$

$F_G = qa = F$

$\sum F_y = 0;\ F_A = F_G = F = qa$

1.2 Schnittmomente

$M_x(z_1) = -qaz_1 - qz_1^2/2$

$(0 \le z_1 \le a)$

$M_{xB} = M_x(a) = -\frac{3}{2}qa^2$

$M_x(z_1) = -qaz_1 - qz_1^2/2 + 4qa(z_1 - a)$

$(a \le z_1 \le 2a)$

$M_x(z_2) = qaz_2$

$M_{x\,max} = \frac{3}{2}qa^2$

1.3 Querkräfte

$0 \le z_1 \le a:\ F_{Qy}(z_1) = \frac{dM_x}{dz_1} = -qa - qz_1$;

$F_{Qy\,B} = -2qa = -2F$

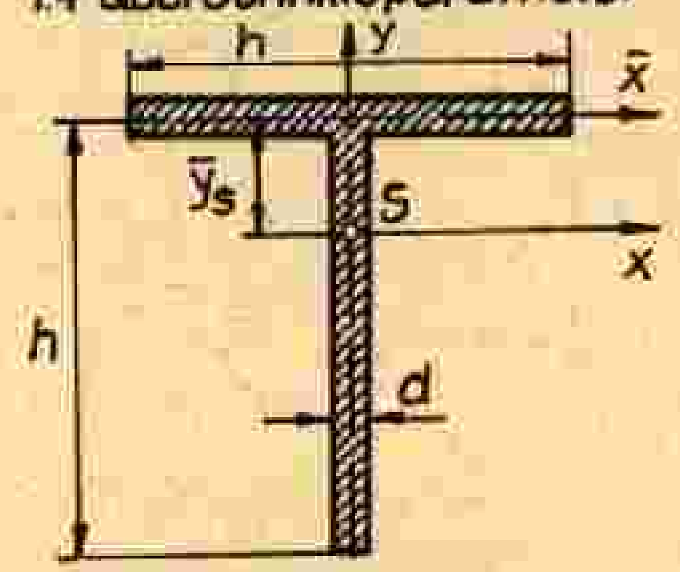
$a \le z_1 \le 2a:\ F_{Qy}(z_1) = -qa - qz_1 + 4qa$

6.2

$0 \le z_2 \le 3/2\,a$: $F_{ay} = qa - F$

$|F_{ay\,max}| = 2F = 2qa$

1.4 Querschnittsparameter



Für $d \ll h$ gilt näherungsweise:

Querschnittsfläche:

$A = 2hd$

Schwerpunktabstand:

$$\bar{y}_s = -\frac{dh\,h/2}{2hd} = -h/4$$

Trägheitsmoment: $J_{xx} = \frac{dh^3}{3} - A\bar{y}_s^2 =$

$$= \frac{dh^3}{3} - 2hd\left(\frac{h}{4}\right)^2 = \frac{5}{24}dh^3$$

Widerstandsmoment:

$$W_x = \frac{J_{xx}}{h-\bar{y}_s} = \frac{5dh^3}{24(h-h/4)} = \frac{5}{18}dh^2$$

1.5 Maximale Biegespannung

$$|\sigma_{z\,max}| = \frac{M_{x\,max}}{W_x} = \frac{3/2\;qa^2}{5/18\;dh^2} = 5{,}4\,\frac{qa^2}{dh^2}$$

Maximale Biegespannungen treten bei $z_1 = a$ und bei $z_2 = \frac{3}{2}a$ auf

2. Schubspannungen

2.1 Statisches Moment

$$S_{x\,max} = \frac{d(h-\bar{y}_s)^2}{2} = \frac{d(h-h/4)^2}{2} = \frac{9}{32}dh^2$$

6.2

2.2 Maximale Schubspannung

$$|\tau_{max}| = \frac{|F_{ay\,max}|\,S_{x\,max}}{J_{xx}\,d} = \frac{2qa\,\frac{9}{32}dh^2}{\frac{5}{24}dh^3 d} =$$

$$= 2{,}7\,\frac{qa}{dh}$$

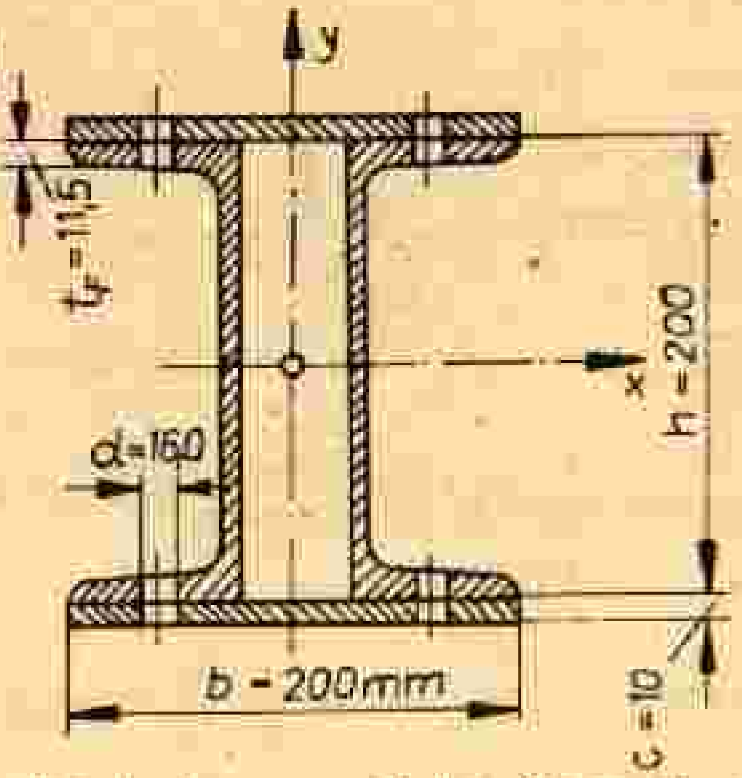
Maximale Schubspannung tritt im Querschnitt $B(z_1 = a)$ bei $y = 0$ auf

3. Verhältnis Schubspannungen zu Biegespannungen

$$\left|\frac{\tau_{max}}{\sigma_{z\,max}}\right| = \frac{2{,}7\,\frac{qa}{dh}}{5{,}4\,\frac{qa^2}{dh^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{h}{a}$$

a/h	3	5	10
$\left\lvert\frac{\tau_{max}}{\sigma_{z\,max}}\right\rvert$	1/6	1/10	1/20

6.3



$I_{xx\,Profil} = 1910\,cm^4$

1. Trägheitsmoment des Gesamtquerschnittes

$$I_{xx} = 2I_{xxp} + 2\cdot b\cdot c\left(\frac{h}{2}+\frac{c}{2}\right)^2$$
$$= 2(1910 + 20\cdot 1\cdot 10,5^2)$$
$$= 8230\ cm^4$$

Beachte! Eigenträgheitsmoment der Gurtplatte wurde vernachlässigt.

2. Statisches Moment der halben Gurtplatte

$$S_x = \frac{b}{2}c\left(\frac{h}{2}+\frac{c}{2}\right) = \frac{20}{2}\,1,0\left(\frac{20}{2}+\frac{1}{2}\right) = 105\,cm^3$$

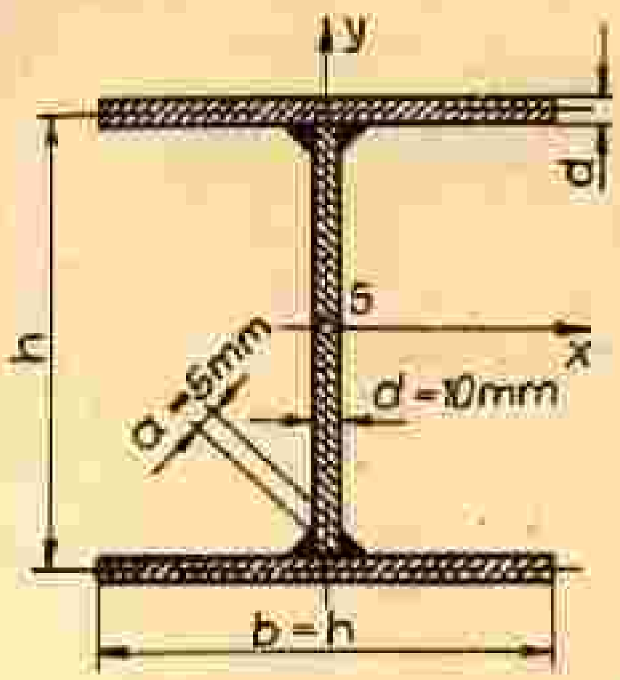
3. Nietkraft

$$F_N = \frac{F_Q\,S_x}{I_{xx}}\,t = \frac{10^5 N\ 105\,cm^3}{8230\ cm^4}\ 10cm = 12758\ N$$

4. Scherspannung im Niet

$$\tau_N = \frac{F_N}{\pi d^2/4} = \frac{12758\ N}{\pi\ 16^2/4\,mm^2} = 63,5\ N/mm^2$$

6.4



1. Höhe des Profiles

1.1 Trägheitsmoment

Für dünnwandige Profile $d \ll h$ gilt näherungsweise

$$J_{xx} = \frac{dh^3}{12} + hd\left(\frac{h}{2}\right)^2 2 = \frac{7}{12}\,dh^3$$

1.2 Widerstandsmoment

$$W_x = \frac{J_{xx}}{\frac{h}{2}+\frac{d}{2}} = \frac{7}{6}\,\frac{dh^3}{h+d} = \frac{7}{6}\,\frac{h^3\cdot 1,0}{h+1,0}\ cm^3$$

1.3 Biegemoment und Querkraft

$$M_{xmax} = FL = 5\cdot 10^4 N\cdot 300\,cm = 15\cdot 10^6\,Ncm$$
$$F_{ay} = F = 5\cdot 10^4\ N$$

1.4 Erforderliche Profilhöhe

$$\sigma_{zul} = \frac{M_{xmax}}{W_x} = \frac{15\cdot 10^6\,Ncm}{\frac{7}{6}\,\frac{h^3}{h+1,0}\,cm^3} = 10^4\,N/cm^2$$

Daraus folgt

$$\frac{h^3}{h+1,0} = \frac{15\cdot 10^6}{\frac{7}{6}\,10^4} = 1285,7\,cm^2$$

$h = 36,35cm$, gewählt $h = 370\,mm$

6.4

2. Erforderliche Schweißnahtlänge

2.1 Querschnittsparameter des gewählten Profiles

Trägheitsmoment:

$$J_{xx} = \frac{7}{12} dh^3 = \frac{7}{12}\, 1{,}0 \cdot 37{,}0^3\, cm^4 = 29548\, cm^4$$

Widerstandsmoment:

$$W_x = \frac{7}{6}\, \frac{h^3}{h+1{,}0} = \frac{7}{6}\, \frac{37{,}0^3}{37{,}0+1{,}0}\, cm^3 = 1555\, cm^3$$

Statisches Moment der Gurtplatte

$$S_{x\,Gurt} = hd\,\frac{h}{2} = \frac{37{,}0^2 \cdot 1{,}0}{2}\, cm^3 = 684{,}5\, cm^3$$

2.2 Erforderliche Schweißnahtlänge

$$\tau_{zul} \sum l_a = \frac{F_{ay}\; S_{xa}}{J_{xx}\; 2a}\, l \quad \longrightarrow$$

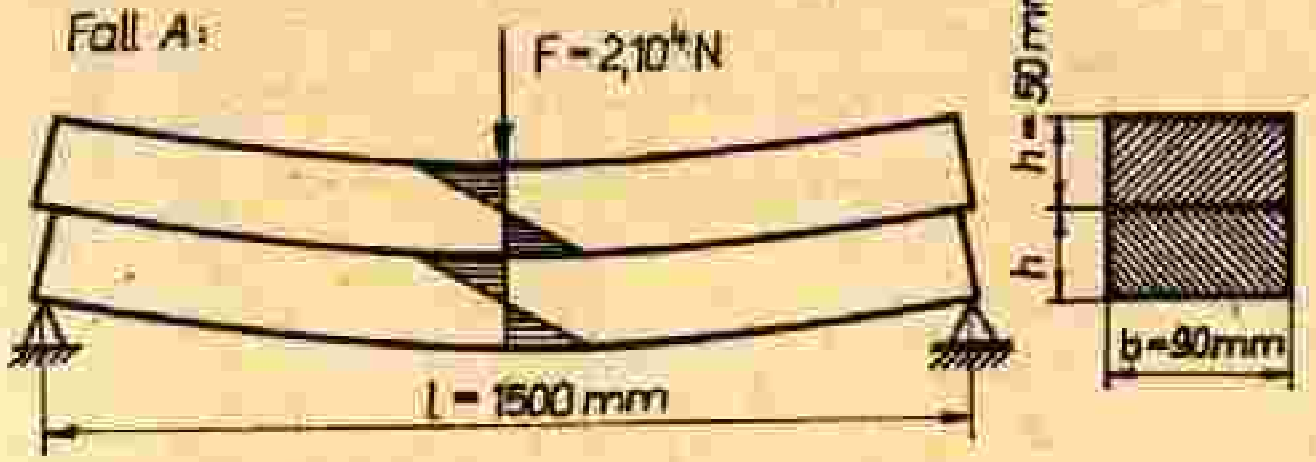
$$\sum l_a = \frac{F_{ay}\; S_{xa}\; l}{2 J_{xx}\, a\, \tau_{zul}} = \frac{5 \cdot 10^4 N \cdot 684{,}5 cm^3 \cdot 30{,}0 cm}{2 \cdot 29548 cm^4 \cdot 0{,}5 cm \cdot 7000\, N/cm^2}$$

$$= 49{,}6\, cm \approx 500\, mm$$

6.5

1. Maximale Biegespannung

Fall A:



Ohne Berücksichtigung der Reibung kann das System als aus zwei Balken bestehend aufgefaßt werden. Widerstandsmomente der Einzelbalken addieren sich.

$$W_x = 2\,\frac{bh^2}{6} = 2\,\frac{9 \cdot 5^2}{6}\, cm^3 = 75{,}0\, cm^3$$

Maximale Biegespannung:

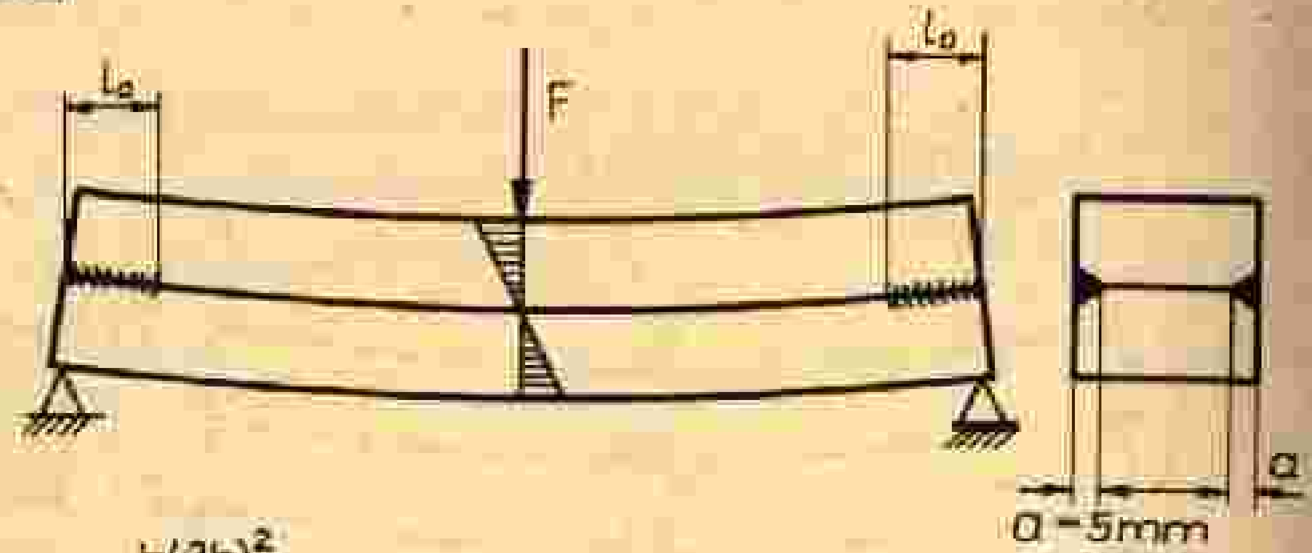
$$\sigma_{z\,max} = \frac{M_{x\,max}}{W_x} = \frac{Fl}{4 W_x} = \frac{2 \cdot 10^4 N \cdot 150\, cm}{4 \cdot 75{,}0\, cm^3} =$$

$$= 10^4\, N/cm^2 = 100\, N/mm^2$$

Fall B:

Wenn ausreichende Schubverbindung beider Einzelträger vorhanden, dann kann System als ein Balken mit der Höhe 2h aufgefaßt werden.

6.5



$$W_x = \frac{b(2h)^2}{6}$$

$$\sigma_{zmax} = \frac{M_{xmax}}{W_x} = \frac{F\,l\,6}{4\cdot b\,4h^2} = \frac{3}{8}\cdot\frac{2\cdot 10^4\,N\cdot 150\,cm}{9\,cm\cdot 5{,}0^2\,cm^2} =$$

$$= 5000\ N/cm^2 = 50\ N/mm^2$$

2. Notwendige Schweißnahtlänge

$$\frac{F_{Qy}\,S_{xmax}\,l/2}{J_{xx}} = 2a\,l_o\,\tau_{zul}$$

$$l_o = \frac{F_{Qy}\,S_{xmax}\,l}{4\,J_{xx}\,a\,\tau_{zul}}$$

Mit $F_{Qy} = \frac{F}{2}$; $S_{xmax} = \frac{bh^2}{2}$

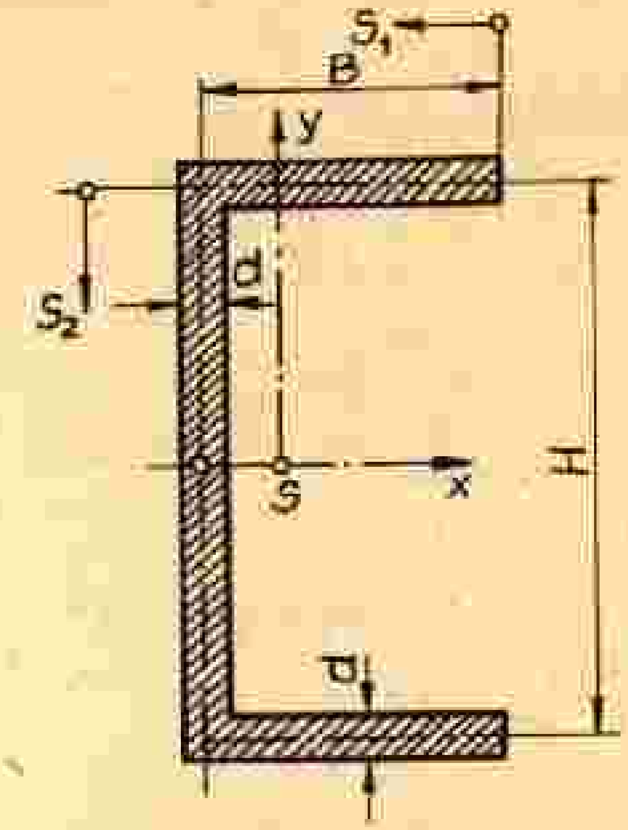
$$J_{xx} = b\,\frac{(2h)^3}{12} = \frac{2}{3}\,bh^3$$

folgt

$$l_o = \frac{3Fl}{32\,ah\,\tau_{zul}} = \frac{3\cdot 2\cdot 10^4\,N\cdot 1500\,mm}{32\cdot 5\,mm\cdot 50\,mm\cdot 70\,N/mm^2} =$$

$$= 160{,}7\,mm$$

6.6



1. Schubspannungsverteilung

Voraussetzung: $d \ll B$

1.1 Trägheitsmoment

$$J_{xx} = 2Bd\,\frac{H^2}{4} + d\,\frac{H^3}{12} = \frac{dH^2}{2}\left(B + \frac{H}{6}\right)$$

(Näherung für dünnwandige Profile)

1.2 Verlauf der statischen Momente

Flansch: $S_x(s_1) = s_1 d\,\frac{H}{2}$

Steg: $S_x(s_2) = Bd\,\frac{H}{2} + d s_2\left(\frac{H}{2} - \frac{s_2}{2}\right)$

mit $s_2 = \frac{H}{2} - y$ folgt

$$S_x(y) = \frac{Hd}{2}\left(B + \frac{H}{4}\right) - \frac{dy^2}{2}$$

$$S_{x\,max} = S_x(y=0) = \frac{Hd}{2}\left(B + \frac{H}{4}\right)$$

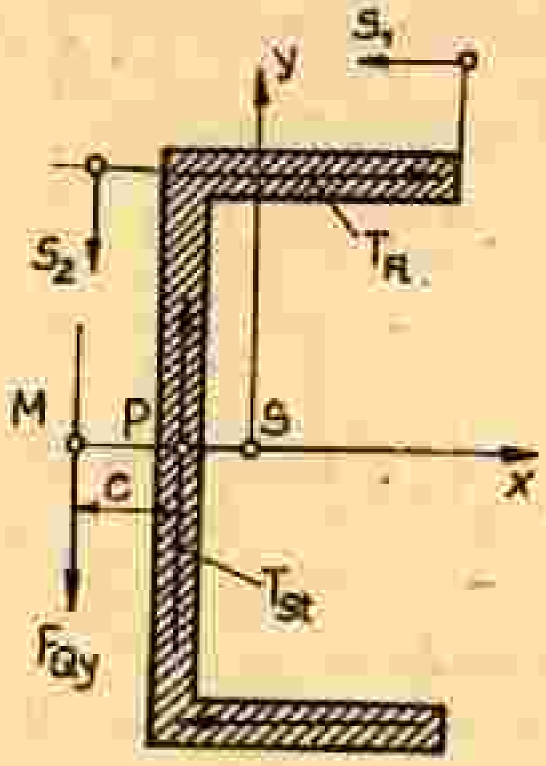
1.3 Schubspannungsverteilung

Allgemein gilt

$$\tau = \frac{F_{Qy}\,S_x}{J_{xx}\,d}$$

6.6

2. Lage des Schubmittelpunktes



$$C = \frac{1}{J_{xx}} \int_0^L S_x(s)\, r^*(s)\, ds$$

Mit P als Bezugspunkt

gilt $r^*(s_1) = \frac{H}{2}$

$r^*(s_2) = 0$

Damit folgt

$$C = \frac{2}{J_{xx}} \int_0^B S_x(s_1) \frac{H}{2} ds_1 =$$

$$= \frac{2}{\frac{dH^2B}{2}\left(1+\frac{H}{6B}\right)} \int_0^B \frac{dH}{2} \cdot \frac{H}{2} s_1\, ds_1$$

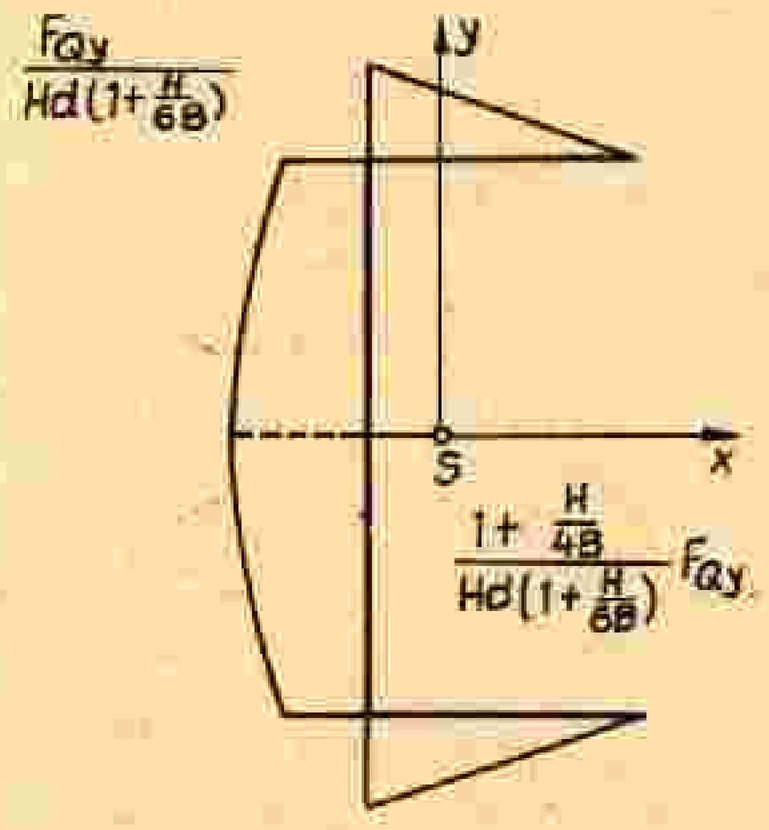
$$= \frac{B}{2\left(1+\frac{H}{6B}\right)}$$

6.6

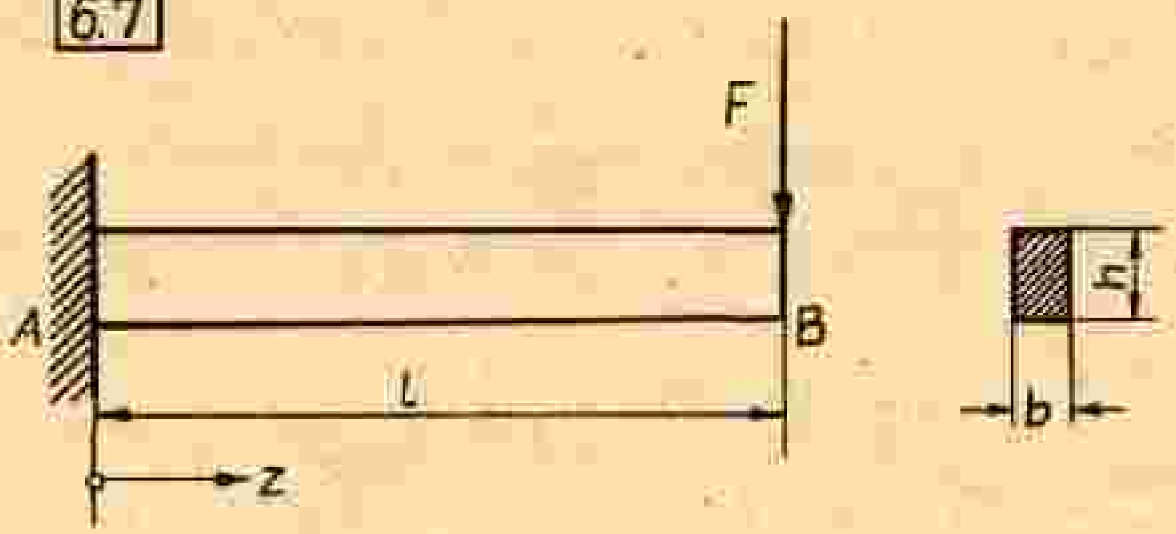
$$\tau_{Flansch} = \frac{F_{ay}\, s_1\, d\, \frac{H}{2}}{\frac{dH^2}{2}\left(B+\frac{H}{6}\right) d} = \frac{F_{ay}}{Hd\left(B+\frac{H}{6}\right)} s_1$$

$$\tau_{Steg} = \frac{F_{ay}\left[\frac{Hd}{2}\left(B+\frac{H}{4}\right) - \frac{dy^2}{2}\right]}{\frac{dH^2}{2}\left(B+\frac{H}{6}\right) d} = \frac{H\left(B+\frac{H}{4}\right) - y^2}{H^2\left(B+\frac{H}{6}\right) d} F_a$$

$$\tau_{max} = \frac{B+\frac{H}{4}}{Hd\left(B+\frac{H}{6}\right)}$$



6.7



1. Verschiebung v_B des Lastangriffspunktes unter Berücksichtigung der Schubverformung

1.1 Momenten- und Querkraftverlauf

$$M_x(z) = -F(l-z)$$

$$F_{Qy} = F$$

1.2 Verschiebungen

Allgemein gilt

$$v''(z) = -\frac{M_x(z)}{EJ} + \left(\frac{F_{Qy}\,k}{GA}\right)'$$

$$\varphi(z) = v'(z) - \frac{F_{Qy}\,k}{GA}$$

Daraus folgt

$$v''(z) = \frac{F(l-z)}{EJ}$$

$$v'(z) = \frac{F}{EJ}\left(lz - \frac{z^2}{2}\right) + C_1$$

$$v(z) = \frac{F}{EJ}\left(l\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + C_1 z + C_2$$

6.7

$$\varphi(z) = \frac{F}{EJ}\left(lz - \frac{z^2}{2}\right) + C_1 - \frac{F\,k}{GA}$$

Randbedingungen:

$$v(0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$\varphi(0) = 0 \longrightarrow C_1 = \frac{F\,k}{GA}$$

$$v(z) = \frac{F}{EJ}\left(l\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + \frac{F\,k}{GA}z =$$

$$= \frac{Fl^3}{2EJ}\left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{z^3}{3l^3} + \frac{2EJk}{GA\,l^2}\,\frac{z}{l}\right)$$

$$v_B = \frac{Fl^3}{EJ}\left(\frac{1}{3} + \frac{EJk}{GAl^2}\right)$$

Für den Rechteckquerschnitt ist

$$k = \frac{6}{5}$$

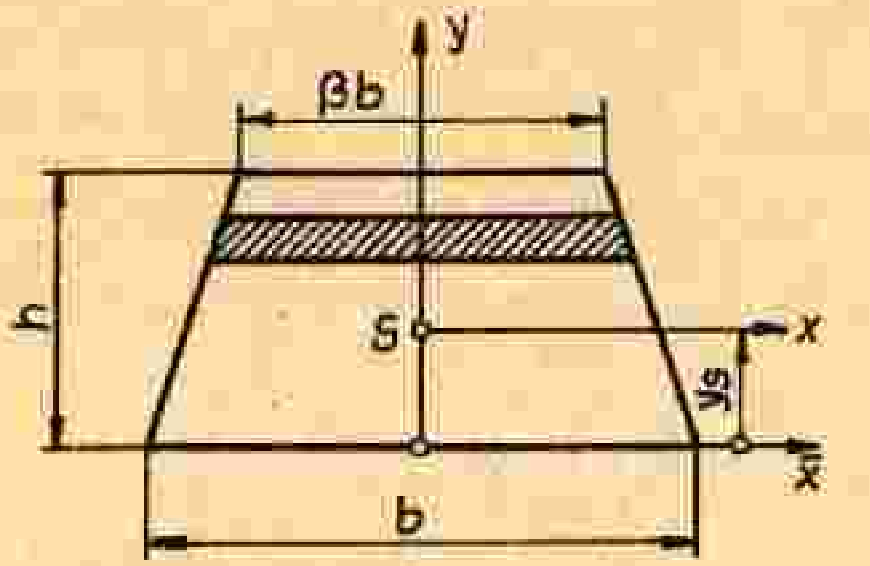
$$\frac{2EJk}{GA\,l^2} = \frac{2}{5}(1+\mu)\,\frac{h^2}{l^2}$$

$$v_B = \frac{Fl^3}{EJ}\left[\frac{1}{3} + \frac{1+\mu}{5}\,\frac{h^2}{l^2}\right]$$

2. Verhältnis der Durchbiegungen infolge Querkraftschub und Biegung

$$\frac{v_{B,S}}{v_{B,B}} = \frac{3}{5}(1+\mu)\,\frac{h^2}{l^2}$$

6.8



$\beta > 0$

1. Allgemeine Lösung

1.1 Querschnittsfläche

$$A = \frac{b\,(1+\beta)}{2}\,h \qquad (1)$$

1.2 Schwerpunktlage

$$y_s = \frac{2}{b(1+\beta)\,h}\int_0^h b(y)\;y\,dy$$

Mit

$$b(y) = b\left[1-\frac{y}{h}(1-\beta)\right] \quad \text{folgt} \qquad (2)$$

$$y_s = \frac{2}{(1+\beta)bh}\int_0^h b\left[1-\frac{y}{h}(1-\beta)\right]y\,dy =$$

$$= \frac{h}{3}\,\frac{1+2\beta}{1+\beta} \qquad (3)$$

6.8

1.3 Trägheitsmoment

$$J_{xx} = \int_0^h b(y)\,y^2 dy - y_s^2 A =$$

$$= \int_0^h b\left[1-\frac{y}{h}(1-\beta)\right]y^2 dy -$$

$$- \frac{h^2}{9}\,\frac{(1+2\beta)^2}{(1+\beta)^2}\cdot\frac{b\,(1+\beta)}{2}\,h =$$

$$= \frac{1+4\beta+\beta^2}{36\,(1+\beta)}\,bh^3 \qquad (4)$$

1.4 Statisches Moment bezogen auf die Schwerachse

$$S_x(y) = \int_y^h b(y)\,(y-y_s)\,dy =$$

$$= \int_y^h b\left[1-\frac{y}{h}(1-\beta)\right](y-y_s)\,dy =$$

$$= bh^2\left(\frac{y_s}{h}\,\frac{y}{h} - \frac{1-\beta}{2}\,\frac{y_s}{h}\,\frac{y^2}{h^2} - \frac{y^2}{h^2} + \frac{1-\beta}{3}\,\frac{y^3}{h^3}\right) \qquad (5)$$

y_s nach (3) eingeführt liefert

$$S_x(y) = bh^2\,\frac{1}{3(1+\beta)}\left[(1+2\beta)\,\frac{y}{h} - (2+2\beta-\beta^2)\,\frac{y^2}{h^2} + (1-\beta^2)\,\frac{y^3}{h^3}\right] \qquad (6)$$

$\boxed{6.8}$

1.5 Schubspannungsverlauf

$$\tau_{zy} = \frac{F_{Qy}\, S_x(y)}{J_{xx}\, b(y)} =$$

$$= \frac{12 F_Q}{bh}\; \frac{(1+2\beta)\frac{y}{h} - (2+2\beta-\beta^2)\frac{y^2}{h^2} + (1-\beta^2)\frac{y^3}{h^3}}{(1+4\beta+\beta^2)\left[1-(1-\beta)\frac{y}{h}\right]} \qquad (7)$$

$\tau_{zy}(y)$ Mittelwert der y-Komponente der Schubspannungen

2. Schubspannungsverläufe für $\beta = 0;\ 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1{,}0$.

Aus (7) folgt

$$\tau_{zy}(\beta=0) = \frac{12 F_Q}{bh}\,\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

$$\tau_{zy}(\beta=0{,}25) = \frac{12 F_Q}{bh}\;\frac{1{,}5\frac{y}{h} - \frac{39}{16}\frac{y^2}{h^2} + \frac{15}{16}\frac{y^3}{h^3}}{\frac{33}{16}\left(1-\frac{3}{4}\frac{y}{h}\right)}$$

$$\tau_{zy}(\beta=0{,}50) = \frac{12 F_Q}{bh}\;\frac{2\frac{y}{h} - \frac{11}{4}\frac{y^2}{h^2} + \frac{3}{4}\frac{y^3}{h^3}}{\frac{13}{4}\left(1-\frac{1}{2}\frac{y}{h}\right)}$$

$$\tau_{zy}(\beta=0{,}75) = \frac{12 F_Q}{bh}\;\frac{\frac{5}{2}\frac{y}{h} - \frac{47}{16}\frac{y^2}{h^2} + \frac{7}{16}\frac{y^3}{h^3}}{\frac{73}{16}\left(1-\frac{1}{4}\frac{y}{h}\right)}$$

$$\tau_{zy}(\beta=1{,}0) = \frac{12 F_Q}{bh}\,\frac{y}{2h}\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

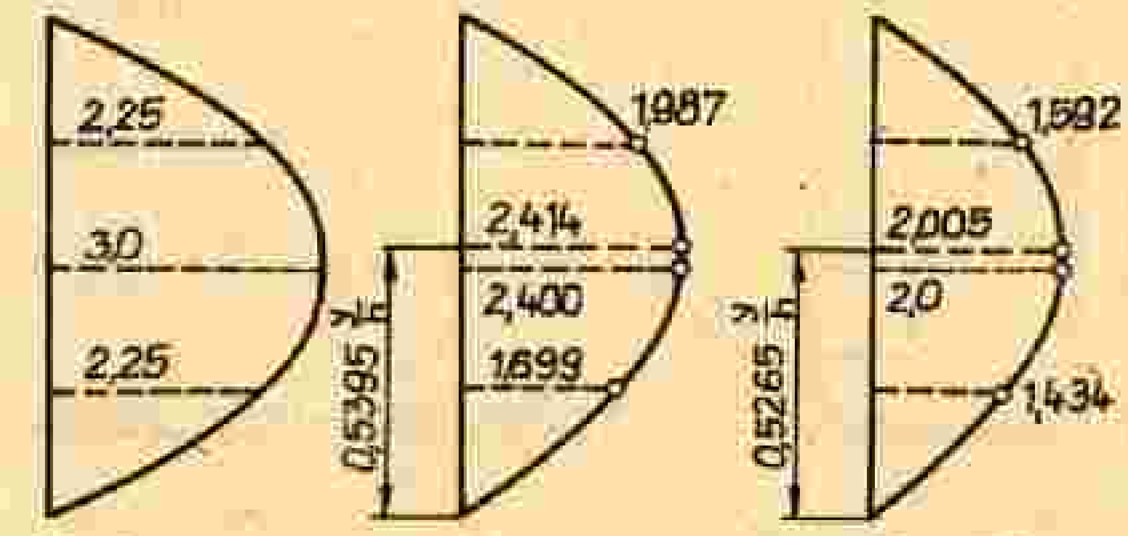
$\boxed{6.8}$

Lage der maximalen Schubspannung folgt aus

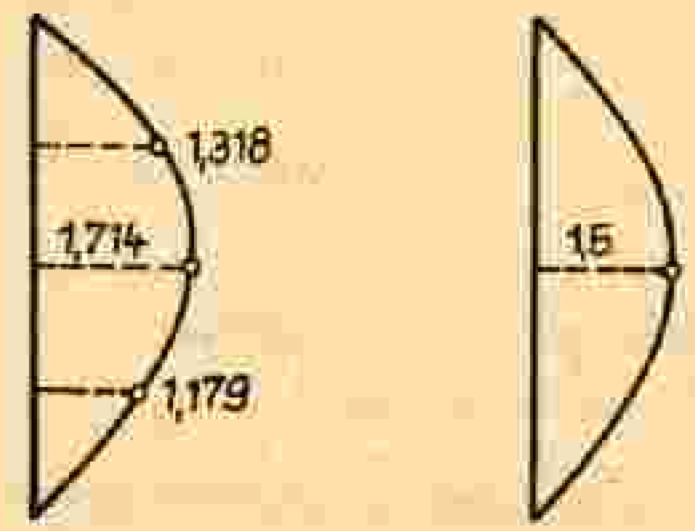
$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \qquad \text{bzw.}$$

$$1+2\beta - 2(2+2\beta-\beta^2)\frac{y}{h} + (5-6\beta^2+\beta^3)\frac{y^2}{h^2}$$

$$-2(1-\beta^2)(1-\beta)\frac{y^3}{h^3} = 0$$



$\beta = 0$ $\qquad$ $\beta = 0{,}25$ $\qquad$ $\beta = 0{,}50$



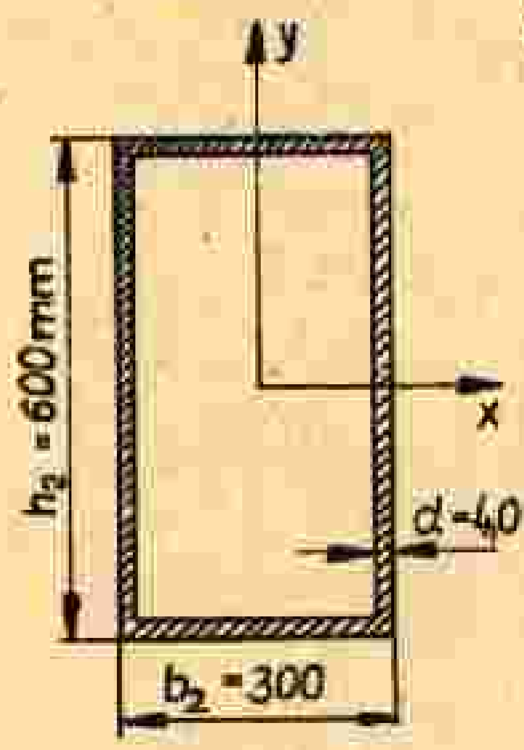
$\beta = 0{,}75$ $\qquad$ $\beta = 1{,}0$

6.9

1. Zulässige Belastung für maximale Biegebeanspruchung

1.1 Maximales Biegemoment:

$$M_{max} = F \cdot l$$



1.2 Trägheitsmoment an der Einspannstelle

$$J_{xx2} = \frac{2h_2^3 d}{12} + 2(b_2 - 2d)d\left(\frac{h}{2} - \frac{d}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot 60^3 \cdot 0{,}4}{12} + 2\,(30 - 2 \cdot 0{,}4)0{,}4\left(\frac{60}{2} - \frac{0{,}4}{2}\right)^2 = 35145\,\text{cm}^4$$

1.3 Zulässige Biegebelastung

$$\sigma_z \leq \sigma_{zul} = \frac{F \cdot l}{J_{xxz}} \frac{h_z}{2}$$

$$F_{zul} = \frac{2\sigma_{zul} J_{xxz}}{l\, h_z} = \frac{110\,\text{N/mm}^2 \cdot 35145 \cdot 10^4\,\text{mm}^4\,2}{1000\,\text{mm}\;\;600\,\text{mm}} =$$

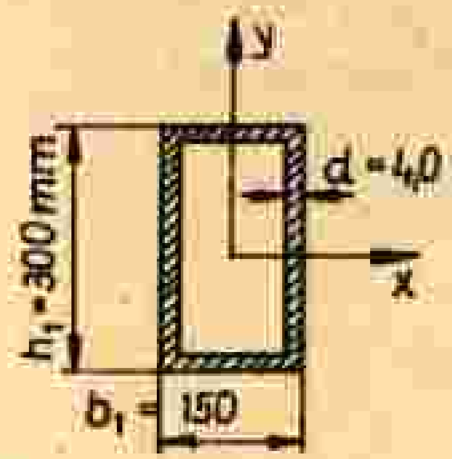
$$= 128865\,\text{N} \approx 129\,\text{KN}$$

2. Zulässige Belastung für maximale Querkraftschubspannung

Die größte Schubbeanspruchung tritt an der Krafteinleitungsstelle auf.

6.9

2.1 Trägheitsmoment an der Krafteinleitungsstelle



$$J_{xx1} = \frac{2h_1^3 d}{12} + 2(b_1 - 2d)d\left(\frac{h_1}{2} - \frac{d}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot 30^3 \cdot 0{,}4}{12} + 2(15 - 2 \cdot 0{,}4)0{,}4\left(\frac{30}{2} - \frac{0{,}4}{2}\right)^2$$

$$= 4288\,\text{cm}^4$$

2.2 Statisches Moment

$$S_{x1max} = \frac{h_1}{2} d \frac{h_1}{4} + \left(\frac{b_1}{2} - d\right)\left(\frac{h_1}{2} - \frac{d}{2}\right)d =$$

$$= \frac{30}{2}0{,}4\,\frac{30}{4} + \left(\frac{15}{2} - 0{,}4\right)\left(\frac{30}{2} - \frac{0{,}4}{2}\right)0{,}4 =$$

$$= 87{,}03\,\text{cm}^3$$

2.3 Zulässige Belastung für maximale Querkraftschubbeanspruchung

Allgemein gilt

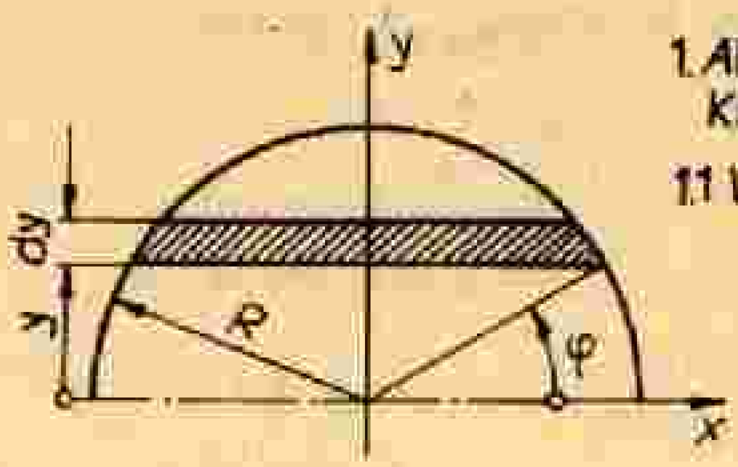
$$\tau_{zul} = \frac{F_{yQ\,max}\; S_{x1\,max}}{J_{xx1}\;\; d}$$

woraus mit $F_{yQ\,max} = F$

$$F = \tau_{zul} \frac{J_{xx1}\, d}{S_{x1\,max}} = \frac{60\,\text{N/mm}^2\; 42{,}88 \cdot 10^6\,\text{mm}^4\; 4\,\text{mm}}{87{,}03 \cdot 10^3\,\text{mm}^3}$$

$$= 118249\,N \approx 118\,\text{KN}$$

6.10



1. Allgemeine Lösung für den Kreisringquerschnitt

1.1 Vollkreisquerschnitt

$$J_{xx} = 2\int_0^R b(y)\, y^2\, dy$$

Mit

$$b(y) = 2R\cos\varphi$$

$$y = R\sin\varphi \;,\; dy = R\cos\varphi\, d\varphi$$

folgt

$$J_{xx} = 4R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi R^4}{4} \qquad (1)$$

$$S_{xmax} = \int_0^R b(y)\, y\, dy = 2R^3 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{2}{3} R^3 \qquad (2)$$

1.2 Kreisringquerschnitt

$$J_{xx} = \frac{\pi}{4}(R_a^4 - R_i^4) \qquad (3)$$

$$S_{xmax} = \frac{2}{3}(R_a^3 - R_i^3) \qquad (4)$$

1.3 Schubspannungen

$$\tau_{yzmax} = \frac{F_{Qy}\, S_{xmax}}{J_{xx}\, 2(R_a - R_i)} = F_Q \frac{4}{3\pi} \frac{R_a^3 - R_i^3}{(R_a^4 - R_i^4)(R_a - R_i)} \qquad (5)$$

6.10

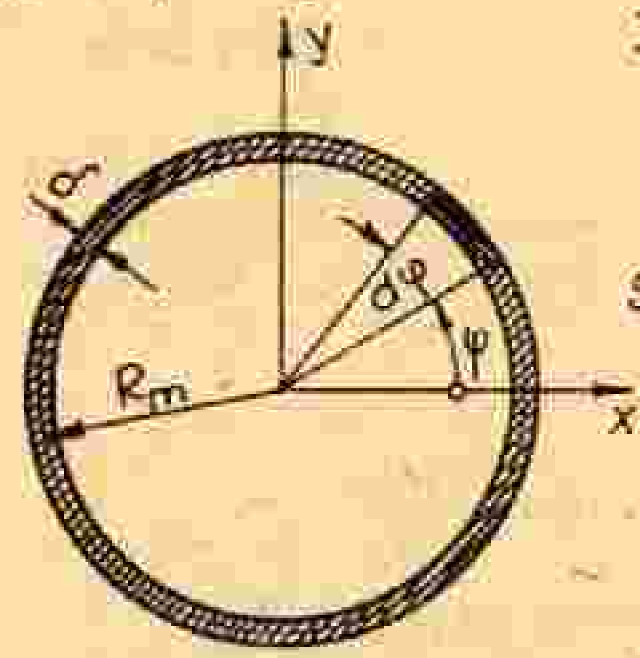
2. Vollkreisquerschnitt $\quad R_a = R,\; R_i = 0$

$$\tau_{yzmax} = F_Q \frac{4}{3\pi R^2} \qquad (6)$$

3. Dünnwandiger Kreisringquerschnitt

$$\text{Mit } R_a - R_i = \delta \;,\; R_m = \frac{R_a + R_i}{2} \qquad (7)$$

für $\delta \ll R$ folgt



$$J_{xx} = 4\int_0^{\pi/2} R_m \delta (R_m \sin\varphi)^2 d\varphi = \pi R_m^3 \delta \qquad (8)$$

$$S_{xmax} = 2\int_0^{\pi/2} R_m \delta R_m \sin\varphi\, d\varphi = 2R_m^2 \delta \qquad (9)$$

$$\tau_{yzmax} = \frac{F_Q\, S_{xmax}}{J_{xx}\, 2\delta} = F \frac{2R_m^2 \delta}{\pi R_m^3 \delta^2 2} = \frac{F_{Qy}}{\pi R_m \delta} \qquad (10)$$

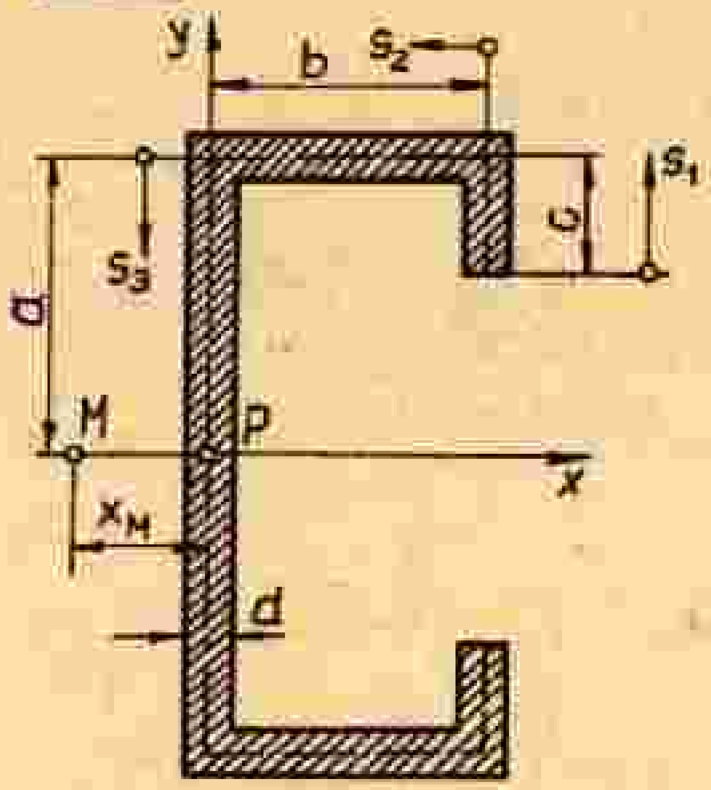
Fehler der Näherung:

Gl. (5) läßt sich mit (7) auch auf die Form

$$\tau_{yz} = \frac{F_{Qy}}{\pi \delta R_m} \frac{1 + \frac{1}{12}(\delta / R_m)^2}{1 + \frac{1}{4}(\delta / R_m)^2}$$

δ / R_m	0,1	0,2	0,3	0,4
Fehler %	0,17	0,66	1,47	2,56

6.11



Wenn $d \ll a$

$$J_{xx} = 2\left[\frac{da^3}{3} + bda^2 + \frac{dc^3}{12} + cd\left(a-\frac{c}{2}\right)^2\right]$$

$$S_{x1}(s_1) = ds_1\left(a-c+\frac{s_1}{2}\right)$$

$$S_{x1}(c) = dc\left(a-\frac{c}{2}\right)$$

$$S_{x2}(s_2) = S_{x1}(c) + ds_2 a = dc\left(a-\frac{c}{2}\right) + das_2$$

$$S_{x2}(s_2=b) = dc\left(a-\frac{c}{2}\right) + dab$$

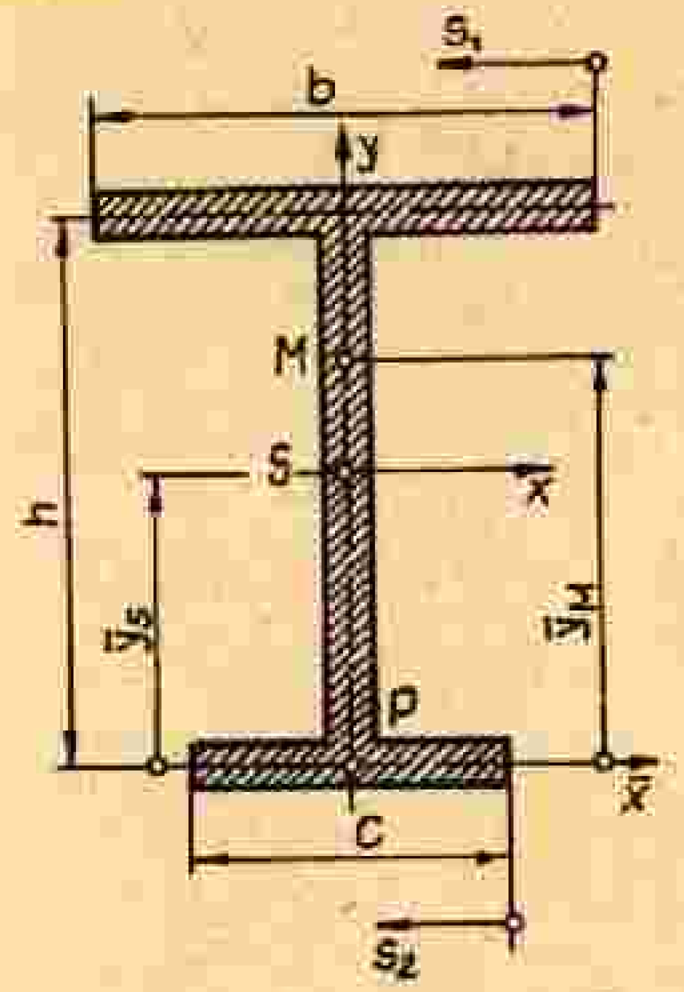
$$S_{x3}(s_3) = S_{x2}(b) + ds_3\left(a-\frac{s_3}{2}\right) = dc\left(a-\frac{c}{2}\right) + dab + ds_3\left(a-\frac{s_3}{2}\right)$$

Mit P als Bezugspunkt gilt

$$x_M = -\frac{2}{J_{xx}}\int_0^L S_x(s)\, r^* ds = -\frac{2}{J_{xx}}\left[\int_0^c S_{x1}(s_1) r_1^* ds_1 + \int_0^b S_{x2}(s_2) r_2^* ds_2 + \int_0^a S_{x3}(s_3) r_3^* ds_3\right] =$$

$$= -\frac{2}{J_{xx}}\left[\int_0^c ds_1\left(a-c+\frac{s_1}{2}\right) b\, ds_1 + \int_0^b \left[dc\left(a-\frac{c}{2}\right)+das_2\right] a\, ds_2\right] = -\frac{2bd}{I_{xx}}\left(a^2c - \frac{c^3}{3} + \frac{a^2 b}{2}\right)$$

6.12



$d \ll h$

Querschnittsfläche:

$$A = d(h+b+c)$$

Schwerpunktlage:

$$\bar{y}_S = \frac{bdh + dh\frac{h}{2}}{d(h+b+c)} = \frac{h\left(b+\frac{h}{2}\right)}{b+c+h}$$

Trägheitsmoment:

$$J_{yy} = \frac{db^3}{12} + \frac{dc^3}{12} = \frac{d}{12}(b^3+c^3)$$

Statische Momente:

$$S_{y1}(s_1) = ds_1\left(\frac{b}{2} - \frac{s_1}{2}\right)$$

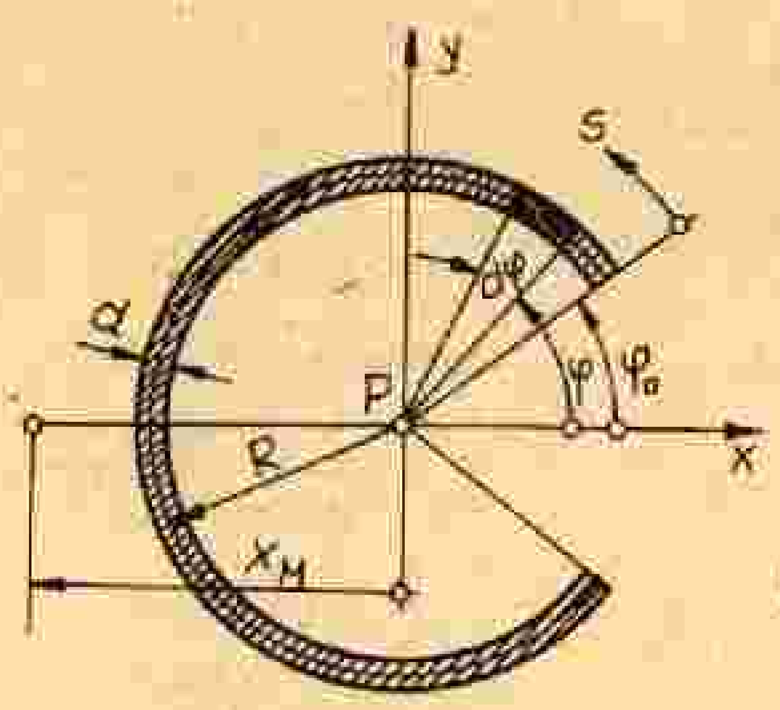
$$S_{y2}(s_2) = ds_2\left(\frac{c}{2} - \frac{s_2}{2}\right)$$

$$\bar{y}_M = \frac{1}{J_{yy}}\left[\int_0^b S_{y1}(s_1) r_1^* ds_1 + \int_0^c S_{y2}(s_2) r_2^* ds_2\right]$$

Mit P als Bezugspunkt folgt $r_1^* = h$, $r_2^* = 0$

$$\bar{y}_M = \frac{1}{J_{yy}}\int_0^b ds_1\left(\frac{b}{2} - \frac{s_1}{2}\right) h\, ds_1 = \frac{h}{1+\frac{c^3}{b^3}}$$

6.13



Für $d \ll R$ gilt

$$J_{xx} = 2\int_{\varphi_0}^{\pi} Rd(R\sin\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= 2R^3 d\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)_{\varphi_0}^{\pi}$$

$$= 2R^3 d\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi_0\right)$$

$$S_x(s) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} R^2 d \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= -R^2 d \cos\varphi \Big|_{\varphi_0}^{\varphi}$$

$$S_x(\varphi) = R^2 d\,(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

$$x_M = -\frac{1}{J_{xx}}\int_0^l S_x\,(s) r^* ds =$$

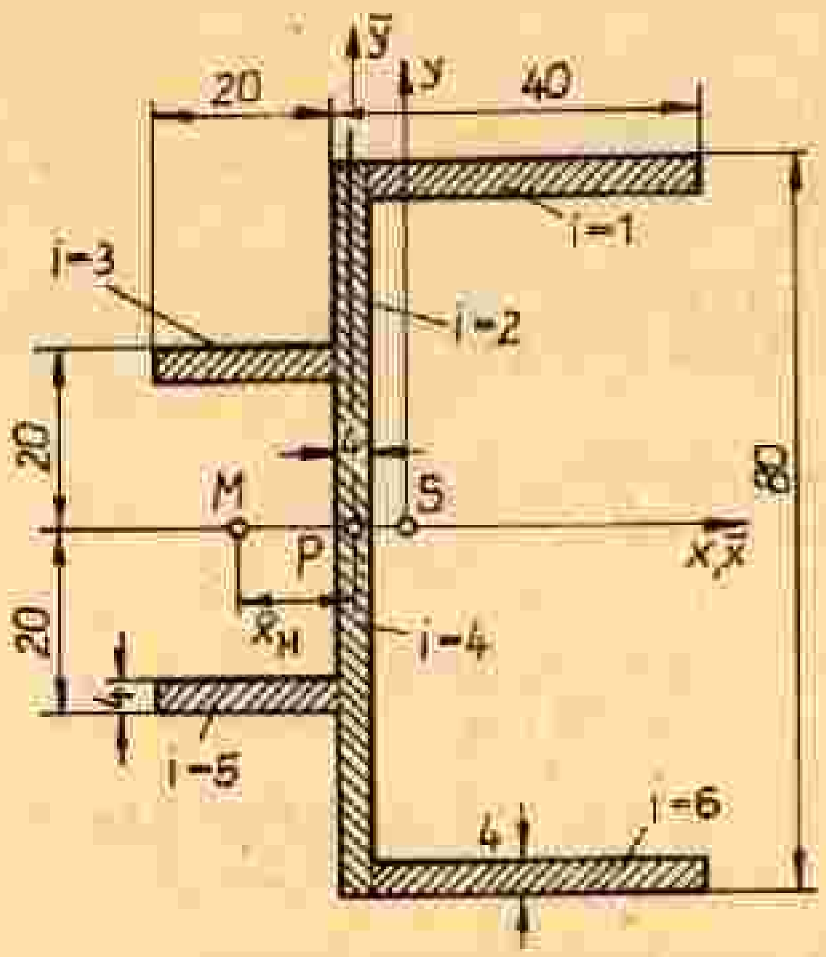
$$= -\frac{1}{J_{xx}}\int_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} S_x\,(\varphi) r^* R d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{R^3 d\ (\pi - \varphi_0 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_0)}\int_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} R^2 d(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) R^2 d\varphi$$

$$= -\frac{R^4 d}{R^3 d\ (\pi - \varphi_0 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_0)}\left(\varphi\cos\varphi_0 - \sin\varphi\right)_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0}$$

$$= -4R\,\frac{(\pi-\varphi_0)\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0}{2(\pi-\varphi_0) + \sin 2\varphi_0}$$

6.14



1. Maximale Biegespannung

i	A_i	$\bar{x}_i$	y_i	$A_i\,\bar{x}_i$	$A_i\,y_i$	$A_i\,y_i^2$	$J_{\bar{x}\bar{x},i}$
1	1,44	2,0	3,8	2,88	5,472	20,794	0,019
2	1,60	0	2,0	0	3,200	6,400	2,133
3	0,80	-1,2	1,8	-0,96	1,440	2,592	0,011
4	1,60	0	-2,0	0	-3,200	6,400	2,133
5	0,80	-1,2	-1,8	-0,96	-1,440	2,592	0,011
6	1,44	2,0	-3,8	2,88	-5,472	20,794	0,019
Σ	7,68			3,84	0	59,572	4,326

$\boxed{6.14}$

$$\bar{x}_S = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} = \frac{3{,}84}{7{,}68} = 0{,}50\,cm$$

$$J_{xx} = \sum A_i y_i^2 + \sum J_{\bar{x}\bar{x},i} = 59{,}572 + 4{,}326 = 63{,}898\,cm^4$$

$$W_x = \frac{J_{xx}}{y_{max}} = \frac{63{,}898}{4{,}0} = 15{,}975\,cm^3$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{1510 \cdot 10^2\,Ncm}{15{,}975\,cm^3} = 9452\,N/cm^2$$

$$= 94{,}52\,N/mm^2$$

2. Maximale Querkraftschubspannung

Maximales statisches Moment :

$$S_{xmax} = \sum_{i=1}^{3} A_i y_i = 10{,}112\,cm^3$$

$$\tau_{zymax} = \frac{F_{Qy}}{J_{xx}} \frac{S_{xmax}}{d} = \frac{3000\,N \cdot 10{,}112\,cm^3}{63{,}898\,cm^4 \cdot 0{,}4\,cm} =$$

$$= 1187\,N/cm^2 = 11{,}87\,N/mm^2$$

3. Lage des Schubmittelpunktes

$$S_{x1}(s_1) = 0{,}4\,s_1 \cdot 3{,}8 \qquad = 1{,}52\,s_1$$

$\boxed{6.14}$

$$S_{x3}(s_3) = 0{,}4\,s_3 \cdot 1{,}8 \qquad = 0{,}72\,s_3$$

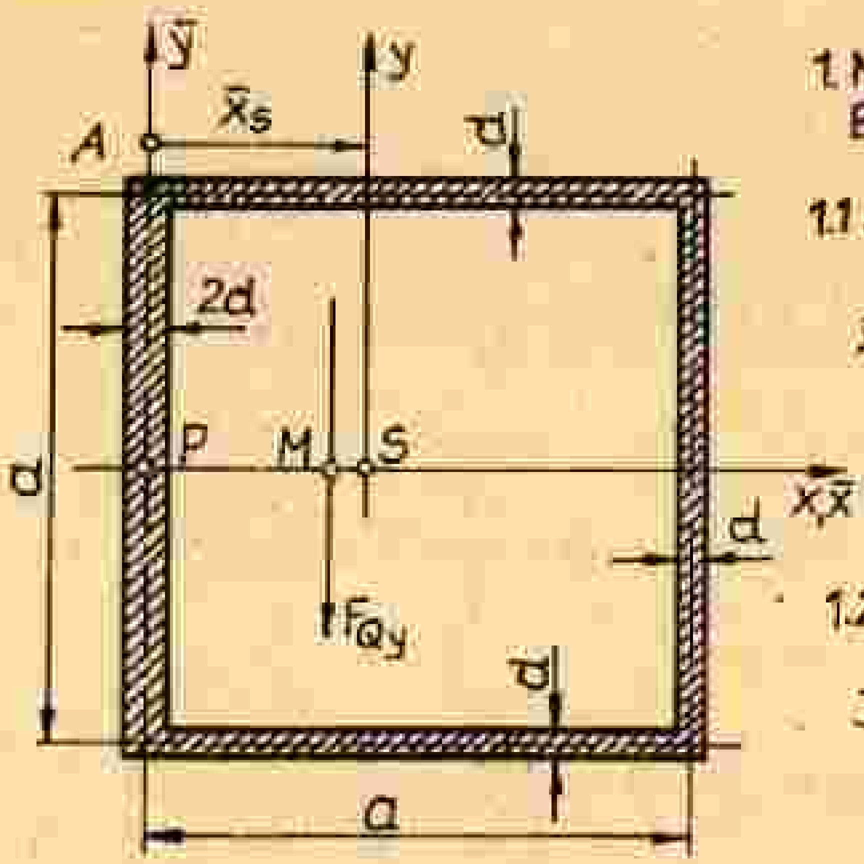
$$\bar{x}_M = -\frac{2}{J_{xx}}\left[\int_0^{3{,}8} S_{x1}(s_1)\,r_1^*\,ds_1 - \int_0^{2{,}2} S_{x3}(s_3)\,r_3^*\,ds_3\right] =$$

$$= -\frac{2}{63{,}898}\left[\int_0^{3{,}8} 1{,}52 \cdot 3{,}8 \cdot s_1\,ds_1 - \int_0^{2{,}2} 0{,}72 \cdot 1{,}8\,s_3\,ds_3\right]$$

$$\bar{x}_M = -\frac{2}{63{,}898}\left[1{,}52 \cdot 3{,}8 \cdot \frac{3{,}8^2}{2} - 0{,}72 \cdot 1{,}8 \cdot \frac{2{,}2^2}{2}\right]$$

$$= -1{,}207\,cm$$

6.15



1. Maximale Biegespannung

1.1 Schwerpunktlage:

$$\bar{x}_S = \frac{ad\frac{a}{2}2 + ada}{5ad} = \frac{2}{5}a$$

1.2 Trägheitsmoment

$$J_{xx} = \frac{3da^3}{12} + 2da\frac{a^2}{4} = \frac{3da^3}{4}$$

1.3 Biegespannung

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{J_{xx}}\frac{a}{2} = \frac{2M_x}{3da^2}$$

2. Maximale Schubspannung

2.1 Querkraftschubflußverlauf

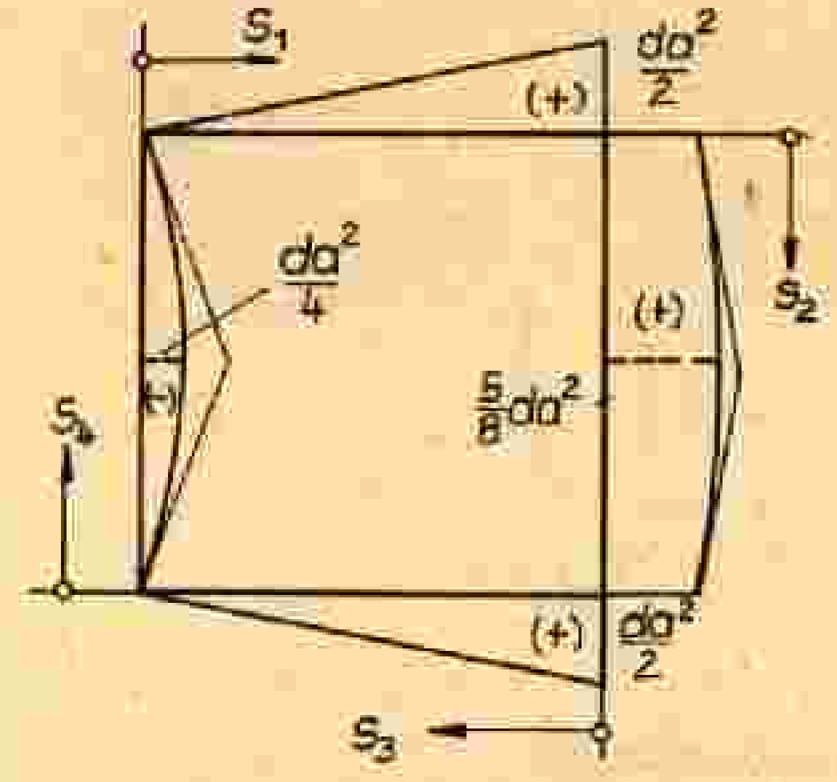
Der Verlauf des Querkraftschubflusses ist durch die Beziehung

$$t(s) = -\frac{F_{Qy}}{J_{xx}}\left[S_x(s) - \frac{\oint S_x(s)\frac{ds}{d(s)}}{\oint \frac{ds}{d(s)}}\right]$$

gegeben.

$S_x(s)$ statisches Moment für einen beliebigen Nullpunkt. (gewählt Pkt. A)

6.15



$$S_{x1} = ds_1\frac{a}{2}$$

$$S_{x2} = S_{x1}(a) + ds_2\left(\frac{a}{2} - \frac{s_2}{2}\right) = d\frac{a^2}{2} + ds_2\left(\frac{a}{2} - \frac{s_2}{2}\right)$$

$$S_{x3} = S_{x2}(a) + ds_3\frac{a}{2} = \frac{da^2}{2} - \frac{ds_3 a}{2}$$

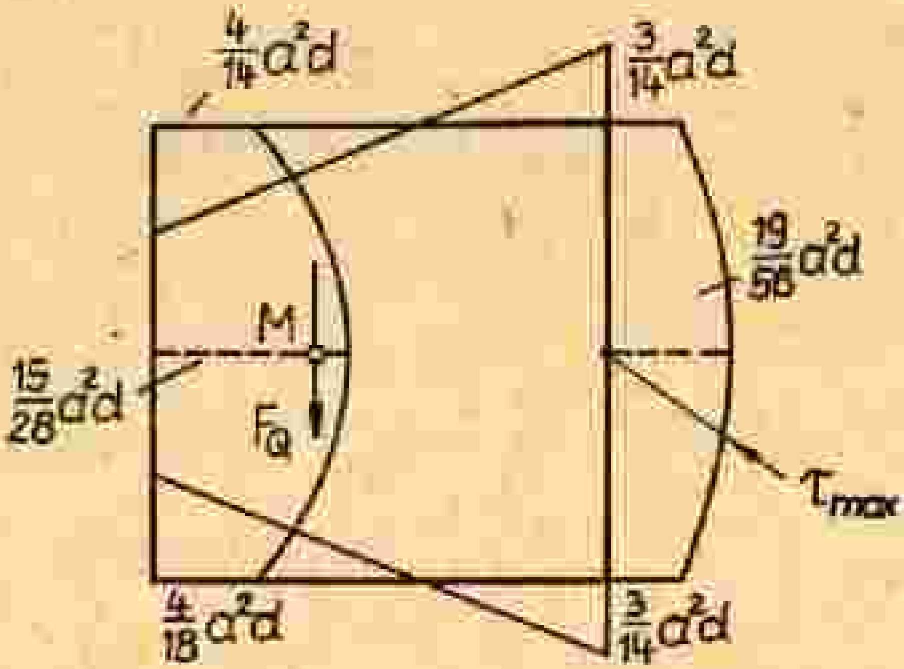
$$S_{x4} = 2ds_4\left(-\frac{a}{2} + \frac{s_4}{2}\right)$$

$$\oint S_x(s)\frac{ds}{d(s)} = \sum_{(i)}\int\frac{S_{xi}\,ds_i}{d_i} = \int_0^a \frac{a}{2}ds_1\frac{ds_1}{d} + \int_0^a\left[\frac{da^2}{2} + ds_2\left(\frac{a}{2} - \frac{s_2}{2}\right)\right]\frac{ds_2}{d} + \int_0^a\left(\frac{da^2}{2} - \frac{da}{2}s_3\right)\frac{ds_3}{d} + \int_0^a 2ds_4\left(\frac{s_4}{2} - \frac{a}{2}\right)\frac{ds_4}{2d} = a^3$$

$$\oint\frac{ds}{d(s)} = \sum_{(i)}\int\frac{ds_i}{d_i} = \frac{a}{d} + \frac{a}{d} + \frac{a}{d} + \frac{a}{2d} = \frac{7}{2}\frac{a}{d}$$

$$t(s) = -\frac{F_{Qy}}{J_{xx}}\left[S_x(s) - \frac{2}{7}a^2 d\right]$$

6.15



$$\frac{t(s)}{F_{Qy}}\,J_{xx} = S_x(s) - \frac{2}{7}a^2 d$$

2.2 Maximale Schubspannung

$$\tau_{zy\,max} = \left(\frac{t(s)}{d}\right)_{max} = \frac{F_{Qy}}{J_{xx}}\;\frac{19}{56}a^2$$

$$= F_{Qy}\,\frac{19\,a^2\,4}{56\cdot 3da^3} = \frac{19}{42}\,\frac{F_Q}{da}$$

3. Lage des Schubmittelpunktes

$$\bar{x}_M = -\frac{1}{J_{xx}}\oint\left[S_x(s) - \frac{\oint S_x(s)\,\frac{ds}{d}}{\oint\frac{ds}{d}}\right]\bar{r}^*\,ds =$$

$$= -\frac{4}{3da^3}\left\{\int_0^a\left(d\,\frac{a}{2}s_1 - \frac{2}{7}a^2 d\right)\frac{a}{2}\,ds_1 + \int_0^a\left[\frac{da^2}{2} + ds_2\left(\frac{a}{2} - \frac{s_2}{2}\right) - \frac{2}{7}a^2 d\right]a\,ds_2 + \int_0^a\left(\frac{da^2}{2} - ds_3\,\frac{a}{2} - \frac{2}{7}a^2 d\right)\frac{a}{2}\,ds_3\right\} = -\frac{22}{63}a$$