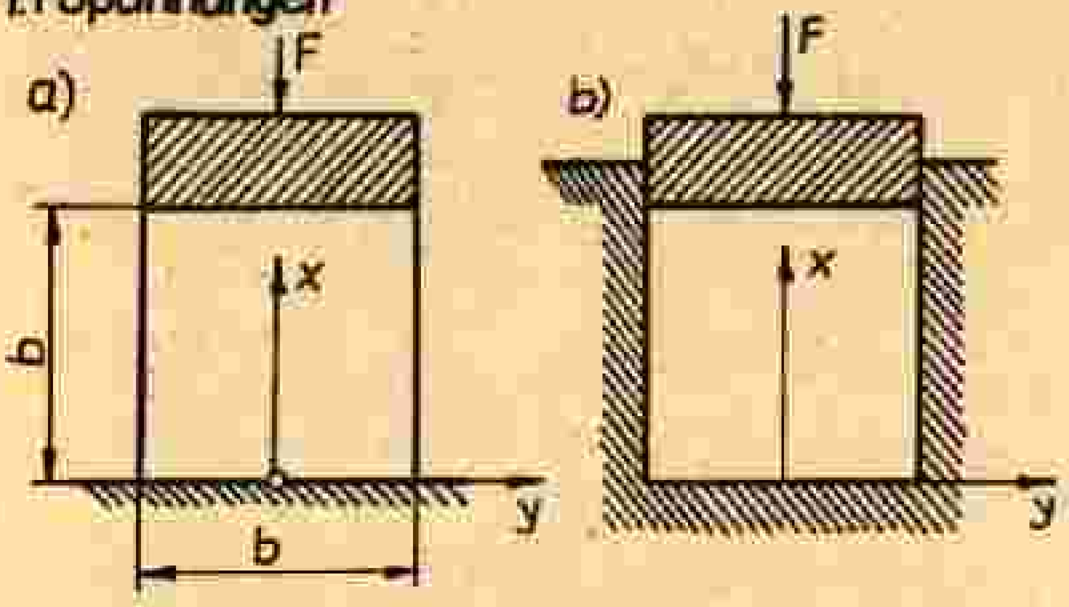
7.1

1. Vergleichspannung nach der Schubspannungshypothese

1.1 Spannungen



Fall a: $\sigma_x = -\frac{F}{b^2} = -\frac{1500\,N}{20^2\,mm^2} = -3{,}75\ N/mm^2$

$\sigma_y = \sigma_z = 0$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0\,; \quad \sigma_3 = -3{,}75\ N/mm^2$

Fall b: $\sigma_x = -\frac{F}{b^2} = -3{,}75\ N/mm^2$

Aus $\quad \varepsilon_y = 0 = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$

$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$

folgt $\quad \sigma_y = \sigma_z = -\frac{F}{b^2}\,\frac{\nu}{1-\nu} = -\frac{1500\,N}{20^2\,mm^2}\,\frac{0{,}3}{1-0{,}3} =$

$= -2{,}50\ N/mm^2$

$\sigma_1 = \sigma_2 = -2{,}50\ N/mm^2\,; \ \sigma_3 = -3{,}75\ N/mm^2$

1.2 Vergleichspannungen

Fall a: $\sigma_{v3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 + 3{,}75 = 3{,}75\ N/mm^2$

Fall b: $\sigma_{v3} = \sigma_1 - \sigma_3 = -2{,}50 + 3{,}75 = 1{,}25\ N/mm^2$

$\boxed{7.1}$

2. Vergleichspannung nach der Gestaltänderungshypothese

Fall a: $\sigma_{v4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left[0+(0+3{,}75)^2+(-3{,}75)^2\right]} =$$

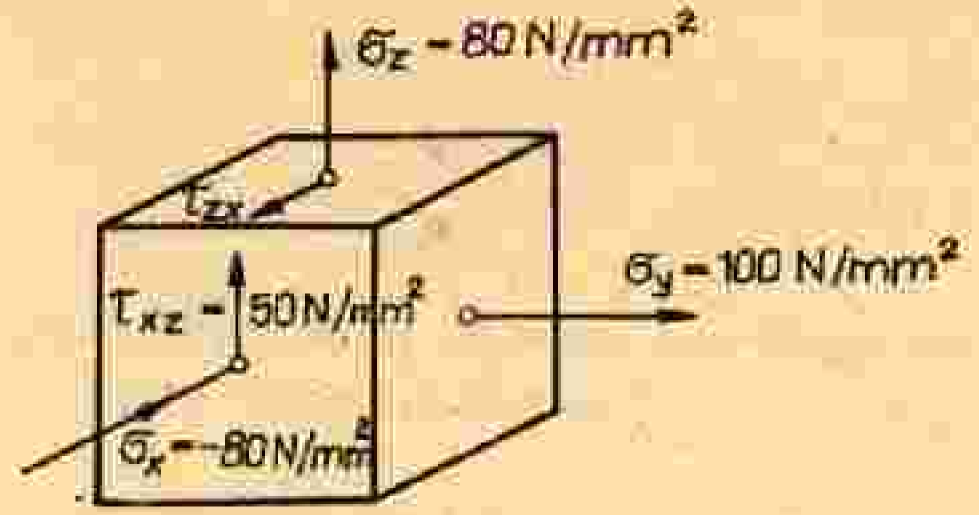
$$= 3{,}75\ \mathrm{N/mm^2}$$

Fall b: $\sigma_{v4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[0+(-2{,}50+3{,}75)^2+(-3{,}75+2{,}50)^2\right]}$

$$= 1{,}25\ \mathrm{N/mm^2}$$

$\boxed{7.2}$

1. Berechnung der Hauptspannungen



$$\sigma^3-(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\sigma^2+(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x -$$
$$-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2)\sigma -$$
$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^3-(-80+100+80)\sigma^2+(-80\cdot 100+100\cdot 80 -$$

$$-80\cdot 80-50^2)\sigma - \begin{vmatrix} -80 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & 0 \\ 50 & 0 & 80 \end{vmatrix} = 0$$

$\sigma_1 = 100\ \mathrm{N/mm^2}$; $\sigma_2 = 94{,}34\ \mathrm{N/mm^2}$;

$\sigma_3 = -94{,}34\ \mathrm{N/mm^2}$

2. Vergleichspannung nach der Hauptspannungshypothese

$$\sigma_{v1} = \sigma_1 = 100\ \mathrm{N/mm^2}$$

7.2

3. Vergleichspannung nach der Hauptdehnungshypothese

$$\sigma_{v2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) =$$

$$= 100 - 0{,}3\,(94{,}3 - 94{,}3) = 100\ \text{N/mm}^2$$

4. Vergleichspannung nach der Schubspannungshypothese

$$\sigma_{v3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 100 + 94{,}3 = 194{,}3\ \text{N/mm}^2$$

5. Vergleichspannung nach der Gestaltänderungshypothese

$$\sigma_{v4} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[(100 - 94{,}3)^2 + (94{,}3 + 94{,}3)^2 + (-94{,}3 - 100)^2\right]} =$$

$$= 191{,}6\ \text{N/mm}^2$$

7.3

1. Torsionsmoment

Aus $P_e = M_T\,\omega = M_T\,2\pi n$ folgt

$$M_T = \frac{P_e}{2\pi n} = \frac{3600 \cdot 10^3\,\text{W}\ 60\,\text{s}}{2\pi\ 110} =$$

$$= 312{,}52 \cdot 10^3\ \text{Nm}$$

2. Erforderlicher Wellendurchmesser

$$\varphi = \frac{M_t}{G J_p}\,l = \frac{M_t\ 32}{G \pi d^4}\,l \quad \rightarrow$$

$$d_{erf} = \sqrt[4]{\frac{32\,M_t\,l}{\pi\,G\,\varphi_{zul}}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 312{,}52 \cdot 10^6\,\text{Nmm}\ 10 \cdot 10^3\,\text{mm}}{\pi \cdot 8{,}08 \cdot 10^4\,\text{N/mm}^2 \cdot \frac{5\pi}{180}}} =$$

$$= 259{,}2\ \text{mm}$$

gewählt $\quad d = 260{,}0\ \text{mm}$

3. Sicherheiten gegen Erreichen der Streckgrenze

3.1 Spannungen

Normalspannung aus der Axialkraft:

$$\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi d^2}\,4 = \frac{10^6 \cdot 4\,\text{N}}{\pi \cdot 260^2\,\text{mm}^2} = 18{,}83\ \text{N/mm}^2$$

Torsionsschubspannung:

$$\tau_{max} = \frac{M_T\ 16}{\pi d^3} = \frac{312{,}52 \cdot 10^6\ 16\ \text{Nmm}}{\pi \cdot 260^3\ \text{mm}^3} = 90{,}56\ \text{N/mm}^2$$

Hauptspannungen:

$$\sigma_{1,3} = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(18{,}83 \pm \sqrt{18{,}83^2 + 4 \cdot 90{,}56^2}\right)$$

7.3

$\sigma_1 = 81{,}63\ N/mm^2$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -100{,}46\ N/mm^2$

3.2 Sicherheit gegen Erreichen der Streckgrenze nach der Hauptspannungshypothese

$\sigma_{v1} = \sigma_{v_3} = 100{,}46\ N/mm^2 \qquad \sigma_{v_1} = |\sigma_3| = 100{,}46\ N/mm^2$

$$S_1 = \frac{\sigma_S}{\sigma_{v_3}} = \frac{350}{100{,}46} = 3{,}48$$

3.3 Sicherheit nach der Hauptdehnungshypothese

$$\sigma_{v2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 81{,}63 - 0{,}3(-100{,}46) = 111{,}77\ N/mm^2$$

$$S_2 = \frac{350}{111{,}77} = 3{,}13$$

3.4 Sicherheit nach der Schubspannungshypothese

$$\sigma_{v3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 81{,}63 - (-100{,}46) = 182{,}09\ N/mm^2$$

$$S_3 = \frac{350{,}0}{182{,}09} = 1{,}92$$

3.5 Sicherheit nach der Gestaltänderungshypothese

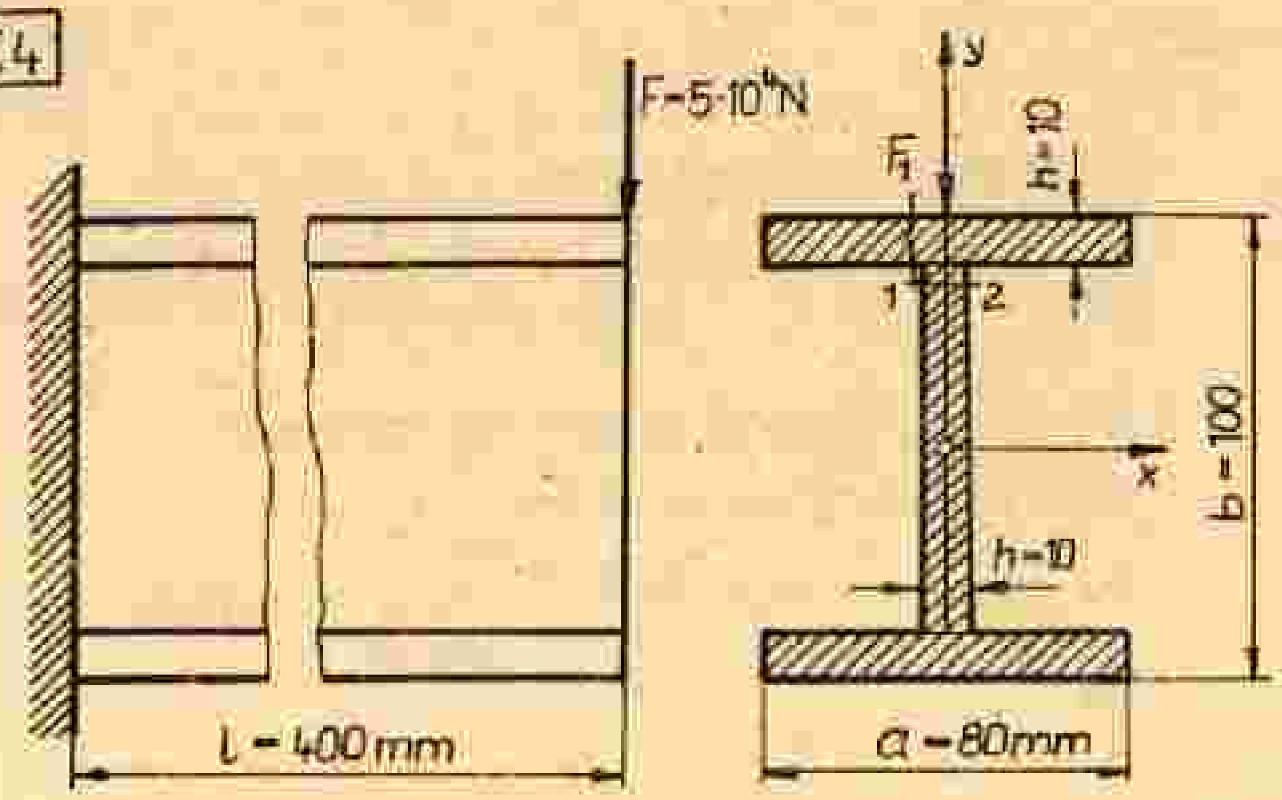
$$\sigma_{v4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left[81{,}63^2 + 100{,}46^2 + (-100{,}46-81{,}63)^2\right]} =$$

$$= 157{,}97\ N/mm^2$$

$S_3 = 350/157{,}97 = 2{,}22$

7.4



1. Maximale Biegespannung

Biegemoment: $M_{max} = F \cdot l = 5 \cdot 10^4\ N \cdot 400\ mm = 20 \cdot 10^6\ Nmm$

Trägheitsmoment:

$$J_x = ah\left(\frac{b}{2} - \frac{h}{2}\right)^2 2 + \frac{ah^3}{12} + h\,\frac{(b-2h)^3}{12} =$$

$$= 80 \cdot 10\left(\frac{100}{2} - \frac{10}{2}\right)^2 2 + \frac{80 \cdot 10^3}{12} + 10\,\frac{(100-2\cdot 10)^3}{12} =$$

$$= 3{,}680 \cdot 10^6\ mm^4$$

Maximale Biegespannung:

$$\sigma_{Bmax} = \frac{M_{max}}{J}\,\frac{b}{2} = \frac{20 \cdot 10^6\ Nmm}{3{,}68 \cdot 10^6\ mm^4}\,\frac{100\ mm}{2} = \underline{271{,}7\ N/mm^2}$$

2. Maximale Schubspannung

Maximale Querkraft: $F_Q = F = 5 \cdot 10^4\ N$

Statisches Moment:

$$S_{xmax} = ah\left(\frac{b}{2} - \frac{h}{2}\right) + \left(\frac{b}{2} - h\right)^2 \frac{h}{2} =$$

$$= 80 \cdot 10\,(50-5) + (50-10)^2\,\frac{10}{2} = 44{,}0 \cdot 10^3\ mm^3$$

7.4

Maximale Schubspannung

$$\underline{\tau_{max}} = \frac{F_Q\, S_{x\,max}}{J_x\; h} = \frac{5\cdot 10^4\,N\cdot 44{,}0\cdot 10^3\,mm^3}{3{,}680\cdot 10^6\,mm^4\; 10\,mm} = \underline{59{,}8\ N/mm^2}$$

3. Maximale Vergleichspannung nach der Gestaltänderungshypothese

Die maximale Vergleichspannung ist entweder im Schnitt 1-1 oder 2-2 zu erwarten.

Mit $\quad S_{x1} = \left(\frac{a}{2} - \frac{h}{2}\right) h \left(\frac{b}{2} - \frac{h}{2}\right) =$

$$= (40-5)\,10\,(50-5) = 15{,}75\cdot 10^3\,mm^3$$

und $\quad \tau_1 = \dfrac{F_Q\, S_{x1}}{J\; h} = \dfrac{5\cdot 10^4\cdot 15{,}75\cdot 10^3}{3{,}680\cdot 10^6\cdot 10} = 21{,}4\ N/mm^2$

folgt

$$\sigma_v^{(1-1)} = \sqrt{\sigma_{B\,max}^2 + 3\,\tau_1^2} = \sqrt{271{,}7^2 + 3\cdot 21{,}4^2} =$$

$$= 274{,}3\ N/mm^2 = \sigma_{v\,max}$$

Für den Schnitt 2-2 erhält man:

$$S_{x2} = a h \left(\frac{b}{2} - \frac{h}{2}\right) = 80\cdot 10\,(50-5) = 36{,}0\cdot 10^3\,mm^3$$

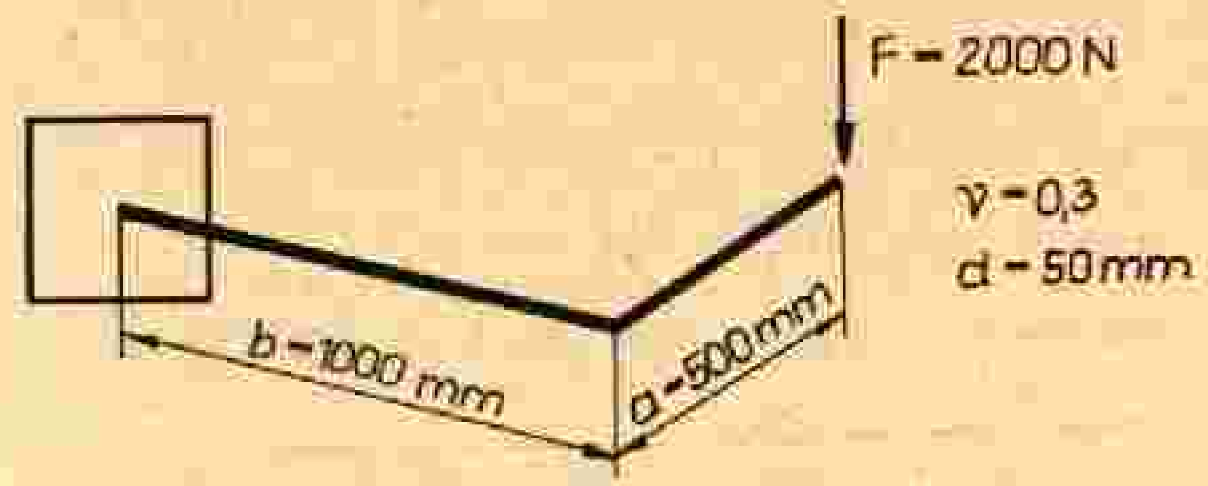
$$\sigma_{B2} = \frac{M}{J}\left(\frac{b}{2} - h\right) = \frac{20\cdot 10^6}{3{,}68\cdot 10^6}\,(50-10) = 217{,}4\ N/mm^2$$

$$\tau_2 = \frac{F_Q\, S_{x2}}{J\; h} = \frac{5\cdot 10^4\cdot 36{,}0\cdot 10^3}{3{,}680\cdot 10^6\cdot 10} = 48{,}9\ N/mm^2$$

$$\sigma_v^{(2-2)} = \sqrt{217{,}4^2 + 3\cdot 48{,}9^2} = 233{,}3\ N/mm^2 < \sigma_v^{(1-1)}$$

7.5

1. Größe der maximalen Vergleichspannungen



Maximales Biegemoment an der Einspannstelle:

$$M_{B\,max} = F\cdot b = 2000\,N\cdot 1000\,mm = 2{,}0\cdot 10^6\,Nmm$$

Maximales Torsionsmoment:

$$M_{T\,max} = F\cdot a = 2000\,N\cdot 500\,mm = 1{,}0\cdot 10^6\,Nmm$$

Maximale Biegespannung:

$$\sigma_{B\,max} = \frac{M_{B\,max}}{\pi\; d^3}\,32 = \frac{2{,}0\cdot 10^6\,Nmm\; 32}{\pi\cdot 50^3\,mm^3} = 163{,}0\ N/mm^2$$

Torsionsspannung:

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{\pi\, d^3}\,16 = \frac{10^6\,Nmm\; 16}{\pi\; 50^3\,mm^3} = 40{,}7\ N/mm^2$$

Hauptspannungen:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_B}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + 4\left(\frac{\tau}{\sigma_B}\right)^2}\right] =$$

$$= \frac{163{,}0}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + 4\left(\frac{40{,}7}{163{,}0}\right)^2}\right] = \begin{cases} 172{,}6 \\ -\ 9{,}6 \end{cases} N/mm^2$$

$$\sigma_2 = 0$$

Vergleichsspannungen nach der Hauptspannungshypothese

$$\sigma_{v1} = \sigma_1 = 172{,}6\ N/mm^2$$

$\boxed{7.5}$

Vergleichspannung nach der Dehnungshypothese

$$\sigma_{V2} = \frac{\sigma_B}{2}\left[1-\nu+(1+\nu)\sqrt{1+4\left(\frac{\tau}{\sigma_B}\right)^2}\,\right] =$$

$$= \frac{163{,}0}{2}\left[1-0{,}3+(1+0{,}3)\sqrt{1+4\left(\frac{40{,}7}{163{,}0}\right)^2}\,\right] =$$

$$= 175{,}5\ \mathrm{N/mm^2}$$

Vergleichspannung nach der Schubspannungshypothese

$$\sigma_{V3} = \sigma_B\sqrt{1+4\left(\frac{\tau}{\sigma_B}\right)^2} = 163{,}0\sqrt{1+4\left(\frac{40{,}7}{163{,}0}\right)^2} =$$

$$= 182{,}2\ \mathrm{N/mm^2}$$

Vergleichspannung nach der Gestaltänderungshypothese

$$\sigma_{V4} = \sigma_B\sqrt{1+3\left(\frac{\tau}{\sigma_B}\right)^2} = 163{,}0\sqrt{1+3\left(\frac{40{,}7}{163{,}0}\right)^2} =$$

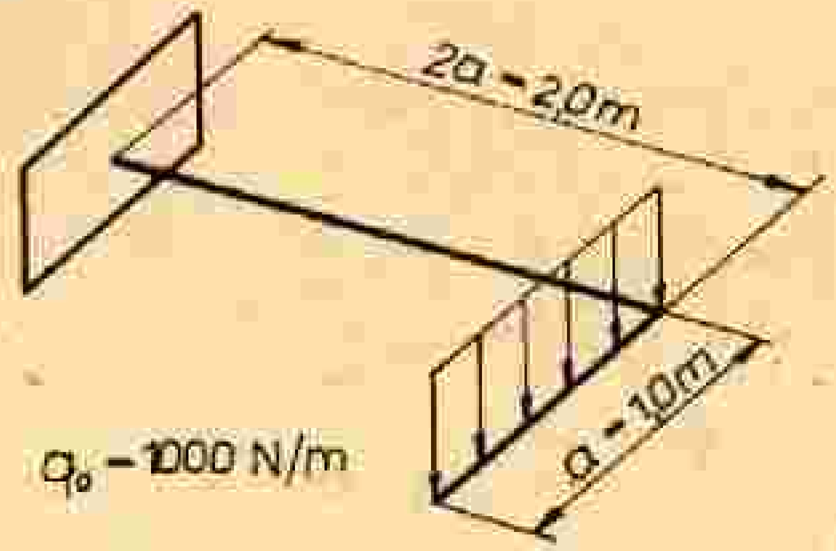
$$= 177{,}6\ \mathrm{N/mm^2}$$

Anmerkung: Der Einfluß der Querkraftschubspannungen wurde vernachlässigt.

2. Ort der maximalen Vergleichspannung

Die maximale Vergleichspannung tritt an der Einspannstelle am Querschnittsumfang oben und unten auf.

$\boxed{7.6}$



$d = 50\ \mathrm{mm}$

$q_0 = 1000\ \mathrm{N/m}$

Biegemoment an der Einspannstelle:

$$M_B = q_0 \cdot a \cdot 2a = 1000\ \mathrm{N/m} \cdot 2 \cdot 1{,}0\ \mathrm{m^2} = 2000\ \mathrm{Nm}$$

Torsionsmoment an der Einspannstelle:

$$M_T = \frac{q_0 a^2}{2} = \frac{1000\ \mathrm{N/m} \cdot 1{,}0^2\ \mathrm{m^2}}{2} = 500\ \mathrm{Nm}$$

Maximale Biegespannung:

$$\sigma_{B\max} = \frac{M_B \cdot 32}{\pi\, d^3} = \frac{2000 \cdot 10^3\ \mathrm{Nmm}\ 32}{\pi \cdot 50^3\ \mathrm{mm^3}} = 163{,}0\ \mathrm{N/mm^2}$$

Torsionsspannung:

$$\tau = \frac{M_T\ 16}{\pi\, d^3} = \frac{500 \cdot 10^3\ \mathrm{Nmm}\ 16}{\pi\ 50^3\ \mathrm{mm^3}} = 20{,}4\ \mathrm{N/mm^2}$$

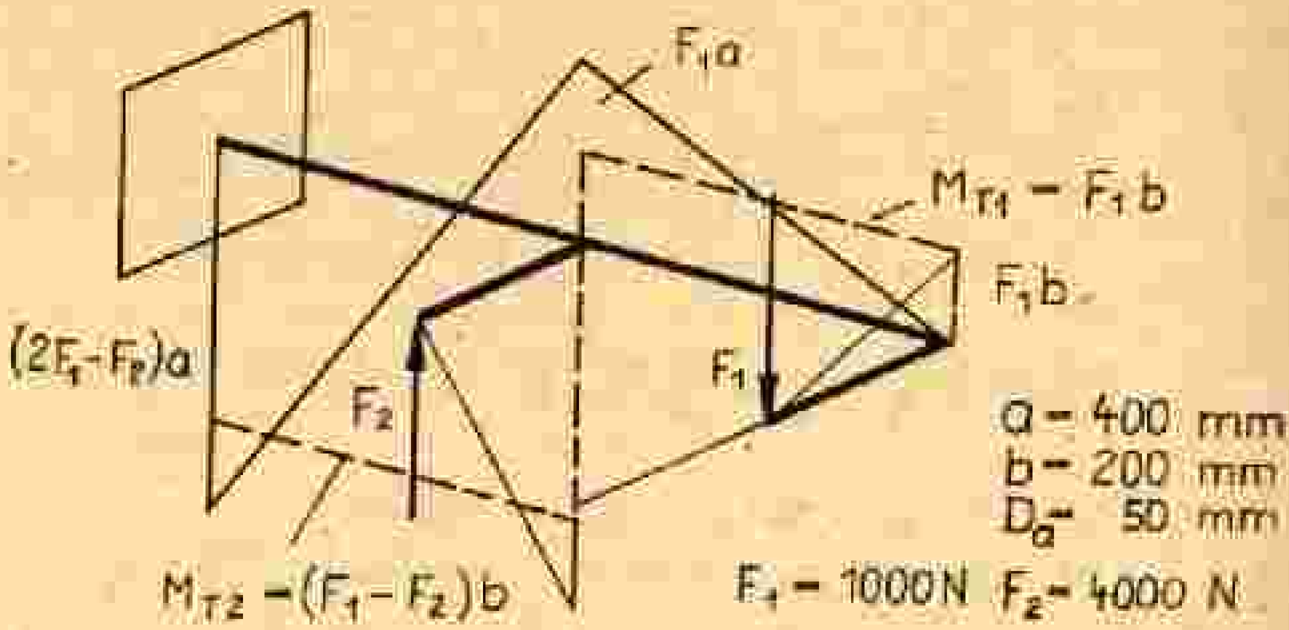
Vergleichspannung nach der Gestaltänderungshypothese:

$$\sigma_v = \sigma_B\sqrt{1+3\left(\frac{\tau}{\sigma_B}\right)^2} = 163{,}0\sqrt{1+3\left(\frac{20{,}4}{163{,}0}\right)^2} =$$

$$= 166{,}8\ \mathrm{N/mm^2}$$

Querkraftschubspannungen wurden nicht berücksichtigt.

7.7



$\sigma_{zul} = 160\ N/mm^2$

1. Momente an Einspannstelle

Biege- und Torsionsmoment erreichen an der Einspannstelle ihr Maximum

$$|M_{B_{max}}| = (2F_1 - F_2)\,a = (2 \cdot 1000 - 4000)\,400 =$$
$$= 80 \cdot 10^4\ Nmm$$

$$|M_{T_{max}}| = (F_1 - F_2)\,b = (1000 - 4000)\ 200 =$$
$$= 60 \cdot 10^4\ Nmm$$

2. Spannungen

$$\sigma_B = \frac{M_B \cdot 32\, D_a}{\pi(D_a^4 - D_i^4)}\ ; \quad \tau = \frac{M_T \cdot 16\, D_a}{\pi(D_a^4 - D_i^4)}$$

3. Erforderlicher Innendurchmesser

Der erforderliche Innendurchmesser folgt aus der Beziehung

$$\sigma_v = \sigma_B \sqrt{1 + 3\left(\frac{\tau}{\sigma_B}\right)^2} = \sigma_{zul}$$

7.7

Einführung der Spannungen ergibt

$$\sigma_{zul} = \frac{32\, D_a\, M_B}{\pi(D_a^4 - D_i^4)} \sqrt{1 + 3\left(\frac{M_T}{2 M_B}\right)^2}$$

woraus

$$D_i = \sqrt[4]{D_a^4 - \frac{32\, D_a M_B}{\pi\, \sigma_{zul}} \sqrt{1 + 3\left(\frac{M_T}{2 M_B}\right)^2}} =$$

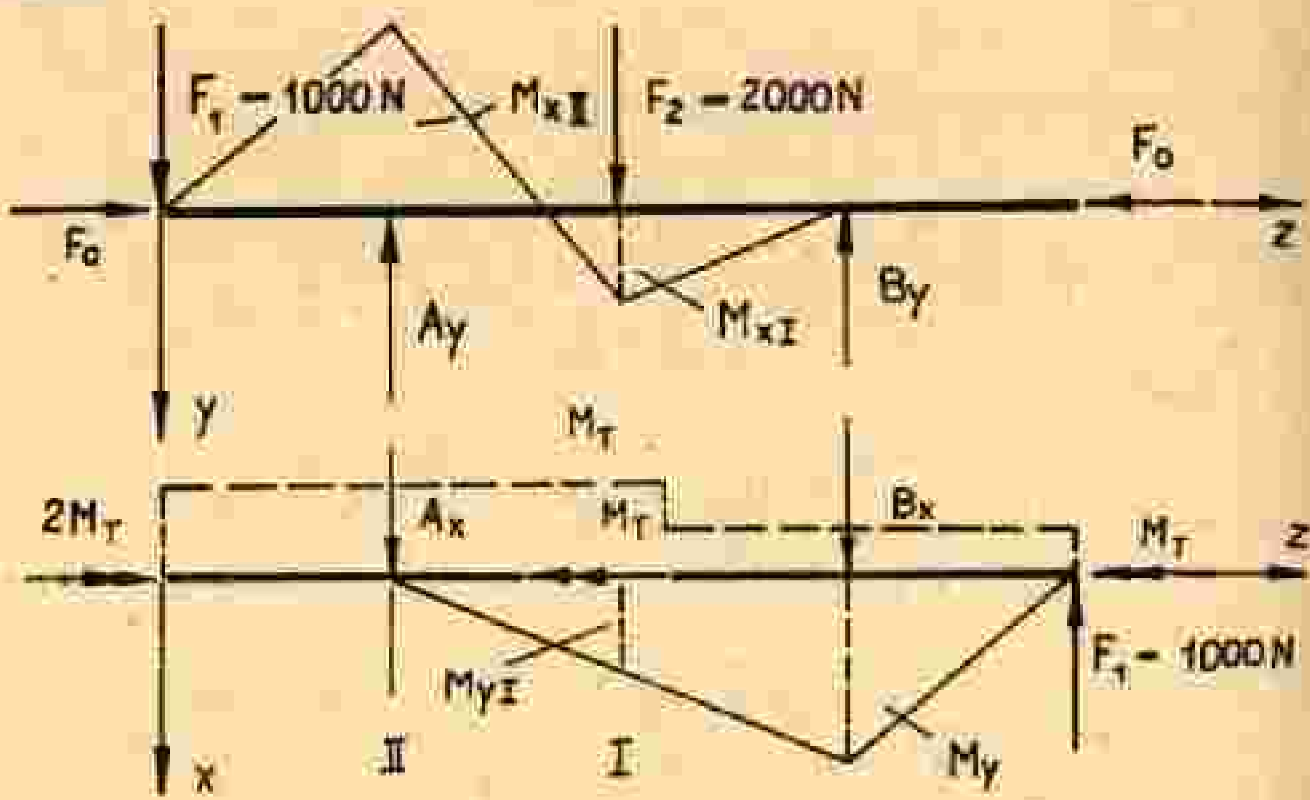
$$= \sqrt[4]{50^4 - \frac{32 . 50 . 80 . 10^4}{\pi \cdot 160} \sqrt{1 + 3\left(\frac{60 . 10^4}{2 . 80 . 10^4}\right)^2}} =$$

$$= 42{,}3\ mm$$

Gewählt $D_i = \underline{42{,}0\ mm}$

Querkraftschubspannungen wurden nicht berücksichtigt.

7.8



1. Schnittkräfte und -Momente:

$$\left.\begin{aligned} F_1 + F_2 - A_y - B_y &= 0 \\ F_1\,3a - A_y\,2a + F_2\,a &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$A_y = \frac{F_1\,3a + F_2\,a}{2a} = \frac{1000 \cdot 3 + 2000}{2} = 2500\ \text{N}$$

$$B_y = F_1 + F_2 - A_y = 1000 + 2000 - 2500 = 500\ \text{N}$$

$$M_{xI} = B_y \quad a = 500\,\text{N} \quad 500\,\text{mm} = 25{,}0 \cdot 10^4\ \text{Nmm}$$

$$M_{xII} = F_1 \quad a = 1000\,\text{N} \quad 500\,\text{mm} = 50{,}0 \cdot 10^4\ \text{Nmm}$$

$$M_{yI} = F_1 \quad \frac{a}{2} = 1000\,\text{N} \cdot 250\,\text{mm} = 25{,}0 \cdot 10^4\ \text{Nmm}$$

$$M_{TI} = M_{TII} = 2M_T = 2 \cdot 10^5\ \text{Nmm}$$

$$F_{zI} = F_{zII} = F_o = 5000\ \text{N}$$

Resultierendes Biegemoment im Querschnitt I-I

$$M_{Bres\,I} = \sqrt{M_{xI}^2 + M_{yI}^2} = \sqrt{25{,}0 \cdot 10^4 + 25{,}0 \cdot 10^4} =$$

$$= 35{,}355 \cdot 10^4\ \text{N/mm}$$

7.8

2. Spannungen

Biegespannung im Querschnitt I-I

$$\sigma_{BI} = \frac{M_{Bres\,I}}{\pi\,D^3}\,32 + \frac{F_o\,4}{\pi\,D^2} = \frac{35{,}355 \cdot 10^4\ \text{Nmm}\ 32}{\pi\ 50^3\ \text{mm}^3} +$$

$$+ \frac{5000\,\text{N}\ 4}{\pi\ 50^2\ \text{mm}^2} = 31{,}4\ \text{N/mm}^2$$

Torsionsspannung im Querschnitt I-I

$$\tau_I = \frac{2M_T}{\pi D^3}\,16 = \frac{2 \cdot 10^5\ 16\ \text{Nmm}}{\pi\ \ 50^3\ \text{mm}^3} = 8{,}1\ \text{N/mm}^2$$

Jm Querschnitt II-II ergeben sich Biege- und Torsionsspannung zu

$$\sigma_{BII} = \frac{M_{xII}}{\pi\,d^3}\,32 + \frac{F_o}{\pi d^2}\,4 = \frac{50 \cdot 10^4\ \text{Nmm}\ 32}{\pi\ 35^3} +$$

$$+ \frac{5000\ \text{N}\ 4}{\pi\ 35^2\,\text{mm}^2} = 124{,}0\ \text{N/mm}^2$$

$$\tau_{II} = \frac{2\,M_T\,16}{\pi\,d^3} = \frac{2 \cdot 10^5\ \text{Nmm}\,16}{\pi\ 35^3\ \text{mm}^3} = 23{,}8\ \text{N/mm}^2$$

3. Vergleichsspannungen nach der Gestaltänderungshypothese

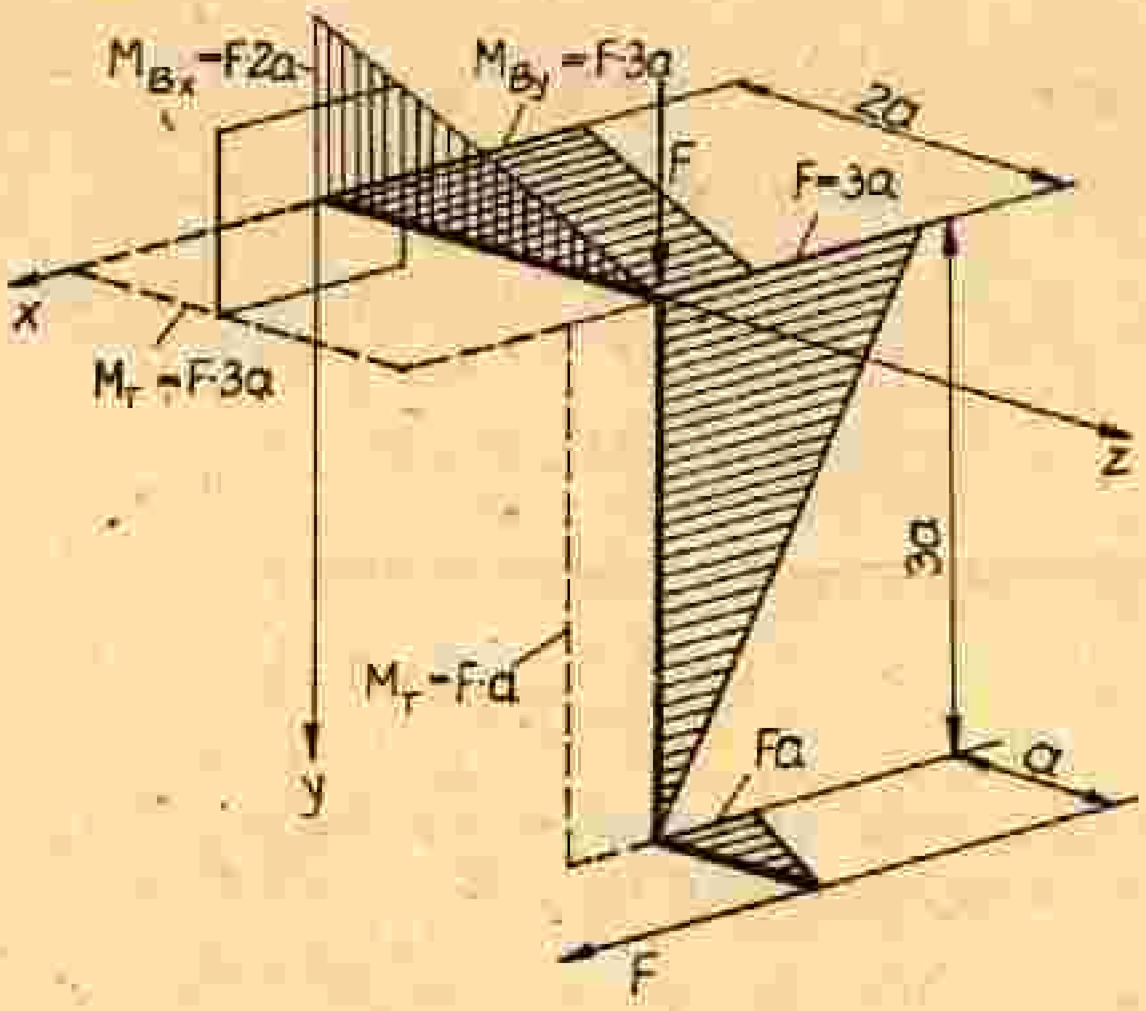
$$\sigma_{vI} = \sqrt{\sigma_{BI}^2 + 3\,\tau_I^2} = \sqrt{31{,}4^2 + 3 \cdot 8{,}1^2} =$$

$$= 34{,}4\ \text{N/mm}^2$$

$$\sigma_{vII} = \sqrt{\sigma_{BII}^2 + 3\,\tau_{II}^2} = \sqrt{124{,}0^2 + 3 \cdot 23{,}8^2} =$$

$$= 130{,}6\ \text{N/mm}^2$$

7.9



1. Biege- und Torsionsmomente

An der Einspannstelle gilt:

$$|M_{Bx}| = F \cdot 2a = 1000\,\mathrm{N} \cdot 2 \cdot 500\,\mathrm{mm} = 10^6\,\mathrm{Nmm}$$

$$|M_{By}| = F \cdot 3a = 1000\,\mathrm{N} \cdot 3 \cdot 500\,\mathrm{mm} = 1{,}5 \cdot 10^6\,\mathrm{Nmm}$$

$$M_T = F \cdot 3a = \quad = 1{,}5 \cdot 10^6\,\mathrm{Nmm}$$

Resultierendes Biegemoment an der Einspannstelle

$$M_{Bres} = \sqrt{M_{Bx}^2 + M_{By}^2} = \sqrt{(10^6)^2 + (1{,}5 \cdot 10^6)^2} = 1{,}8028 \cdot 10^6\,\mathrm{Nmm}$$

7.9

2. Spannungen

Maximale Biegespannung

$$\sigma_{Bmax} = \frac{M_{Bres}\; 32 d_a}{\pi (d_a^4 - d_i^4)}$$

Maximale Torsionsspannung

$$\tau_{max} = \frac{M_T\; 16 d_a}{\pi (d_a^4 - d_i^4)}$$

Maximale Vergleichspannung

$$\sigma_{vmax} = \sqrt{(\sigma_{Bmax})^2 + 3(\tau_{max})^2}$$

$$= \frac{32}{\pi} \frac{d_a}{(d_a^4 - d_i^4)} \sqrt{M_{Bres}^2 + 3\left(\frac{M_T}{2}\right)^2}$$

3. Erforderlicher Innendurchmesser

Aus $\sigma_{vmax} = \sigma_{zul}$ folgt

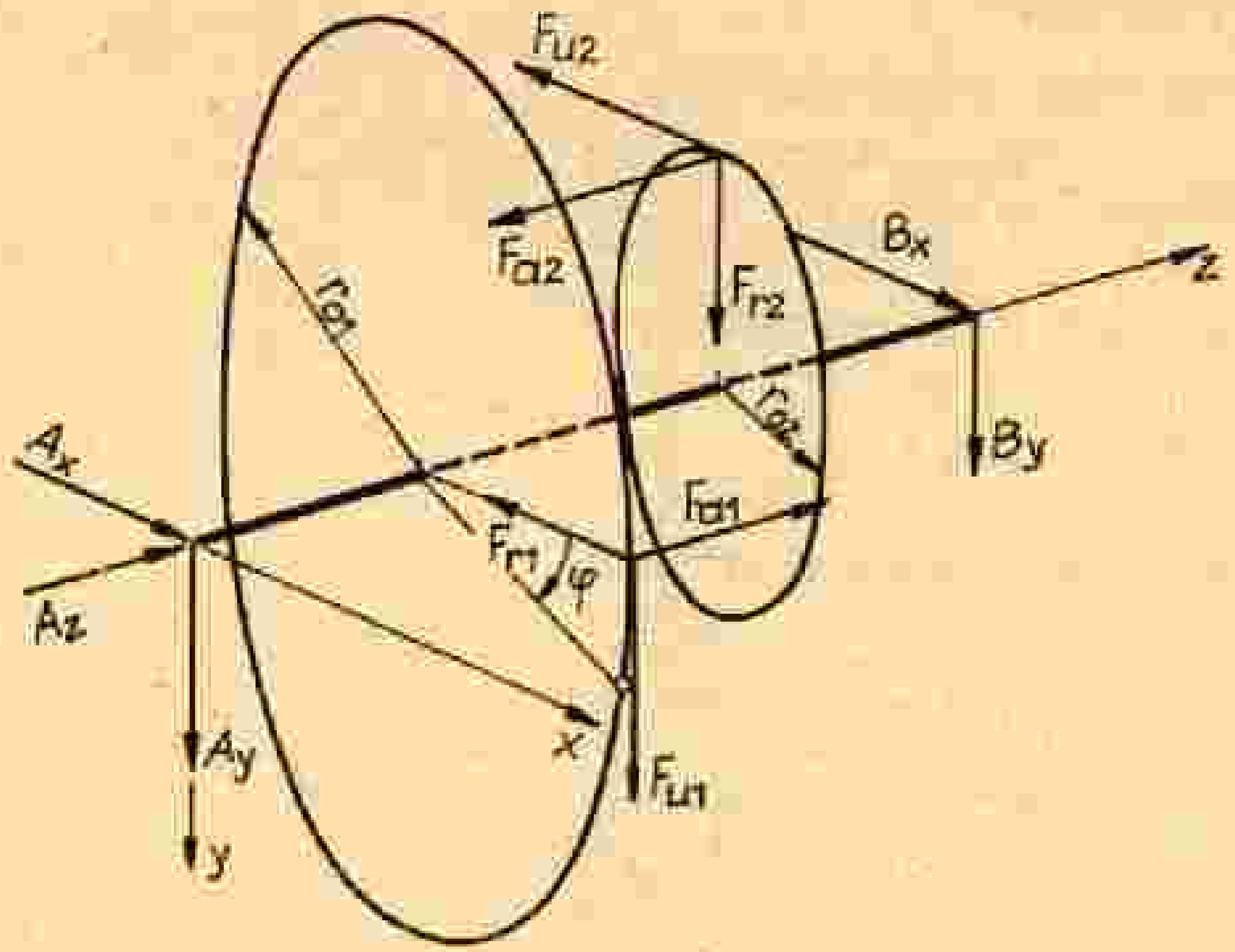
$$d_i = \sqrt[4]{d_a^4 - \frac{32 d_a}{\pi \sigma_{zul}} \sqrt{M_{Bres}^2 + 3\left(\frac{M_T}{2}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt[4]{100^4\,\mathrm{mm}^4 - \frac{32 \cdot 100\,\mathrm{mm}}{\pi \cdot 120\,\mathrm{N/mm^2}} \sqrt{(1{,}803 \cdot 10^6)^2 (\mathrm{Nmm})^2 + \left(\frac{1{,}5 \cdot 10^6}{2}\right)^2 3\,(\mathrm{Nmm})^2}}$$

$$= 94{,}9\,\mathrm{mm}$$

gewählt $d_i = 94{,}0\,\mathrm{mm}$

7.10



1. Maximale Vergleichspannung

1.1 Kräfte

$F_{u1} = 4500\ \mathrm{N}$

$F_{a1} = F_{u1} \tan\beta_o = 4500 \tan 20^\circ = 1637{,}9\ \mathrm{N}$

$F_{r1} = F_{u1} \dfrac{\tan\alpha_u}{\cos\beta_o} = 4500 \dfrac{\tan 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 1743{,}0\ \mathrm{N}$

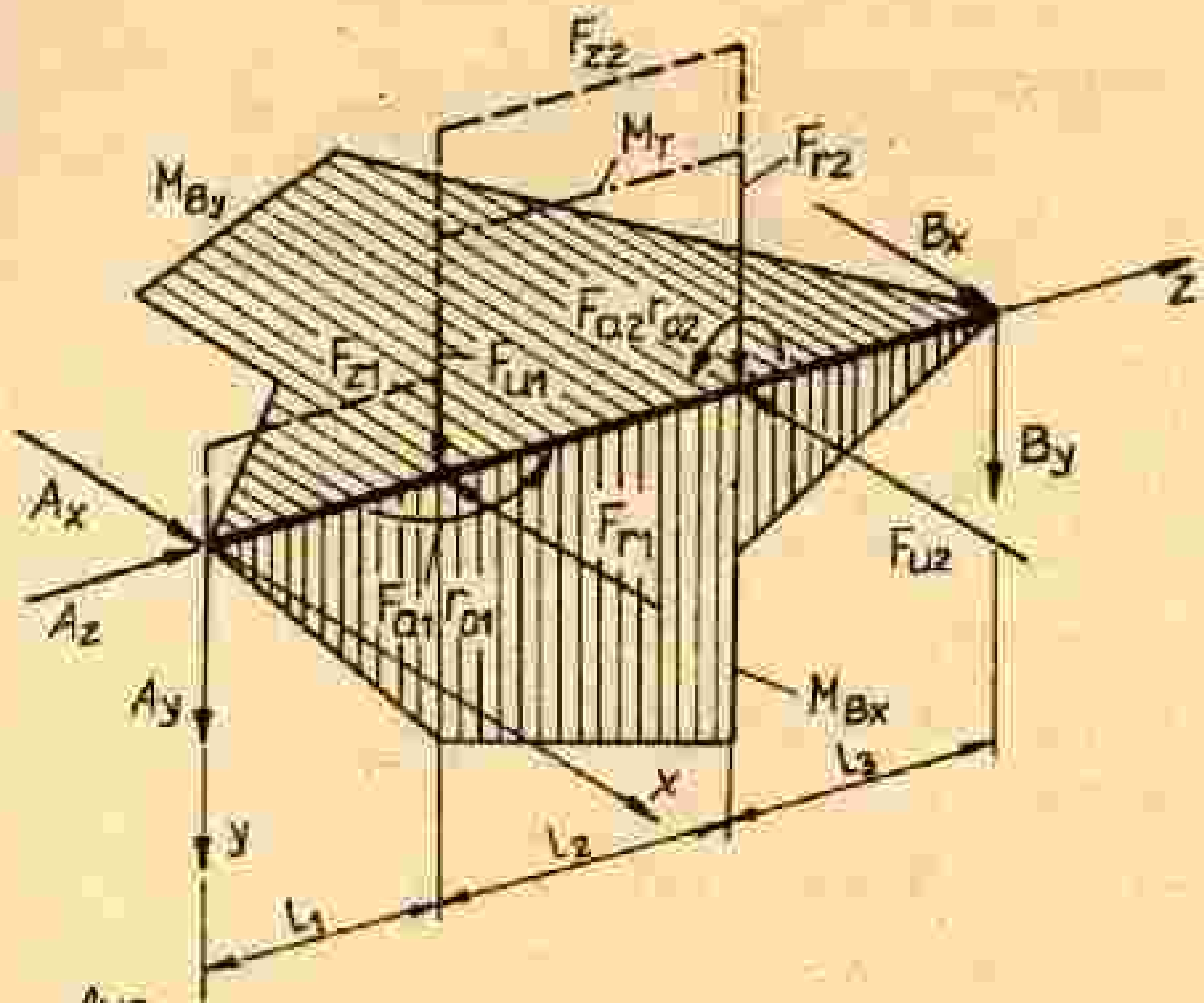
$F_{u2} = F_{u1} \dfrac{r_{o1}}{r_{o2}} = 4500\ \dfrac{120}{50} = 10800\ \mathrm{N}$

$F_{a2} = F_{u2} \tan\beta_o = 10800 \tan 20^\circ = 3930{,}9\ \mathrm{N}$

$F_{r2} = F_{u2} \dfrac{\tan\alpha_u}{\cos\beta_o} = 10800 \dfrac{\tan 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 4183{,}2\ \mathrm{N}$

7.10

1.2 Schnittkraftgrößen



Aus

$A_y + F_{u1} + F_{r2} + B_y = A_y + 4500 + 4183{,}2 + B_y = 0$

$A_y\,(l_1+l_2+l_3) + F_{u1}\,(l_2+l_3) + F_{r2}\,l_3 + F_{a2}\,r_{o2} =$

$= A_y\,(55+70+60) + 4500\,(70+60) + 4183{,}2 \cdot 60 +$

$+ 3930{,}9 \cdot 50 = 0$

folgt

$A_y = -5581{,}3\,N\ ;\quad B_y = -3101{,}9\ \mathrm{N}$

Biegemomente:

$M_{Bx1} = -A_y\,l_1 = 5581{,}3 \cdot 55 = 30{,}70 \cdot 10^4\ \mathrm{Nmm}$

$M_{Bx2} = -A_y\,(l_1+l_2) - F_{u1}\,l_2 = 5581{,}3\ (55+70) -$

$- 4500 \cdot 70 = 38{,}27 \cdot 10^4\ \mathrm{Nmm}$

$M_{Bx2} = -B_y\,l_3 = 3101{,}\overset{9}{7} \cdot 60 = 1861 \cdot 10^4\ \mathrm{Nmm}$

(rechts von Rad 2)

$\boxed{7.10}$

$$A_x = \frac{F_{r1}(l_2+l_3) + F_{u2} l_3 - F_{a1} r_{o1}}{l_1+l_2+l_3} =$$

$$\frac{1743{,}0\,(70+60)+10800\cdot 60-1637{,}9\cdot 120}{(55+70+60)} = 3665{,}1\ \text{N}$$

$$B_x = -A_x + F_{r1} + F_{u2} = -3665{,}1+1743{,}0+10800 = 8877{,}9\ \text{N}$$

$$M_{By1}^{\text{links}} = A_x l_1 = 3665{,}1\cdot 55 = 20{,}16\cdot 10^4\ \text{Nmm}$$

$$M_{By1}^{\text{rechts}} = A_x l_1 + F_{a1} r_{o1} = 3665{,}1\cdot 55+1637{,}9\cdot 120 = 39{,}81\cdot 10^4\ \text{Nmm}$$

$$M_{By2} = B_x l_3 = 8877{,}9\cdot 60 = 53{,}27\cdot 10^4\ \text{Nmm}$$

Torsionsmoment:

$$M_T = F_{u1} r_{o1} = 4500\cdot 120 = 54{,}0\cdot 10^4\ \text{Nmm}$$

Längskraft:

$$F_{z1} = F_{a2} - F_{a1} = 3930{,}9 - 1637{,}9 = 2293{,}0\ \text{N}$$

$$F_{z2} = F_{a2} = 3930{,}9\ \text{N}$$

Resultierende Biegemomente:

$$M_{B1res} = \sqrt{M_{Bx1}^2 + M_{By1}^2} = \sqrt{30{,}70^2\, 10^8 + 39{,}81^2\, 10^8} =$$

$$= 50{,}27\cdot 10^4\ \text{Nmm}$$

$$M_{B2res} = \sqrt{M_{Bx2}^2 + M_{By2}^2} = \sqrt{38{,}27^2\, 10^8 + 53{,}27^2\, 10^8} =$$

$$= 65{,}59\cdot 10^4\ \text{Nmm}$$

1.3 Spannungen

Normalspannung rechts von Rad 1

$$\sigma_{z1} = \frac{M_{B1res}\ 32}{\pi d^3} + \frac{F_{z2}\ 4}{\pi d^2} =$$

$\boxed{7.10}$

$$= \frac{50{,}27\cdot 10^4\ \text{Nmm}\ 32}{\pi\ 35^3\ \text{mm}^3} + \frac{3930{,}9\ \text{N}\ 4}{\pi\ 35^2\ \text{mm}^2} = 123{,}5\ \text{N/mm}^2$$

Torsionsspannung

$$\tau_1 = \frac{M_T\ 16}{\pi d^3} = \frac{54{,}0\cdot 10^4\ \text{Nmm}\ 16}{\pi\ 35^3\ \text{mm}^3} = 64{,}1\ \text{N/mm}^2$$

Normalspannung links von Rad 2

$$\sigma_{z2} = \frac{M_{B2res}}{\pi d^3}\, 32 + \frac{F_{z2}\ 4}{\pi d^2} =$$

$$= \frac{65{,}59\cdot 10^4\ \text{Nmm}\ 32}{\pi\ 35^3\ \text{mm}^3} + \frac{3930{,}9\ \text{N}\ 4}{\pi\cdot 35^2\ \text{mm}^2} = 159{,}9\ \text{N/mm}^2$$

$$\tau_2 = \tau_1 = 64{,}1\ \text{N/mm}^2$$

Vergleichspannung rechts von Rad 1

$$\sigma_{v1} = \sqrt{\sigma_{z1}^2 + 3\,\tau_1^2} = \sqrt{123{,}5^2+3\cdot 64{,}1^2} = 166{,}1\ \text{N/mm}^2$$

Vergleichspannung links von Rad 2

$$\sigma_{v2} = \sqrt{\sigma_{z2}^2 + 3\,\tau_2^2} = \sqrt{159{,}9^2+3\cdot 64{,}1^2} =$$

$$= \underline{194{,}7\ \text{N/mm}^2 = \sigma_{v\,max}}$$

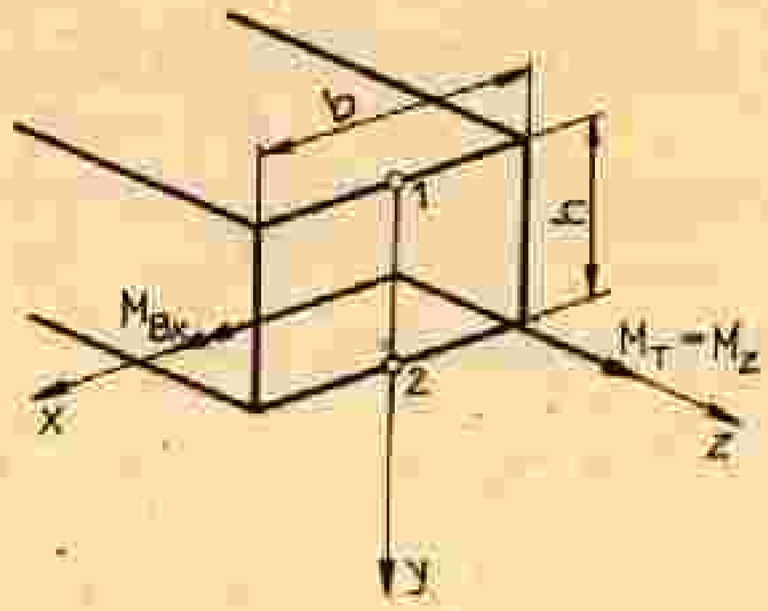
2. Vergleichspannung unmittelbar links von Rad 1

$$\sigma_{z1}^{\text{links}} = \frac{\sqrt{M_{Bx1}^2 + (M_{By1}^{\text{links}})^2}}{\pi\ d^3}\, 32 + \frac{F_{z1}\cdot 4}{\pi d^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{30{,}70^2\cdot 10^8+20{,}16^2\, 10^8}}{\pi\ 35^3}\, 32 + \frac{2293{,}0\cdot 4}{\pi\ 35^2}$$

$$= \underline{89{,}6\ \text{N/mm}^2 = \sigma_v}$$

$\boxed{7.11}$



$M_{Bx} = 2160$ Nm

$M_T = 1340$ Nm

$b = 60$ mm

$h = 30$ mm

1. Maximale Biegespannung

$$|\sigma_{Bmax}| = \frac{M_{Bx}}{W_x} = \frac{M_{Bx}}{bh^2}\,6 = \frac{2160 \cdot 10^3 \text{Nmm}\, 6}{60\,\text{mm}\ 30^2\text{mm}^2} =$$

$$= 240{,}0\ \text{N/mm}^2$$

Die maximale Biegespannung tritt in den Punkten 1 und 2 auf.

2. Maximale Schubspannung

$$\tau_{Tmax} = \frac{M_T}{h^2 b}\,\varkappa\left(\frac{b}{h}\right) = \frac{1340 \cdot 10^3\,\text{Nmm}}{30^2\text{mm}^2\, 60\,\text{mm}}\ 4{,}07 =$$

$$= 101{,}0\ \text{N/mm}^2$$

$\varkappa$ für $b/h = 2$ aus Tabelle

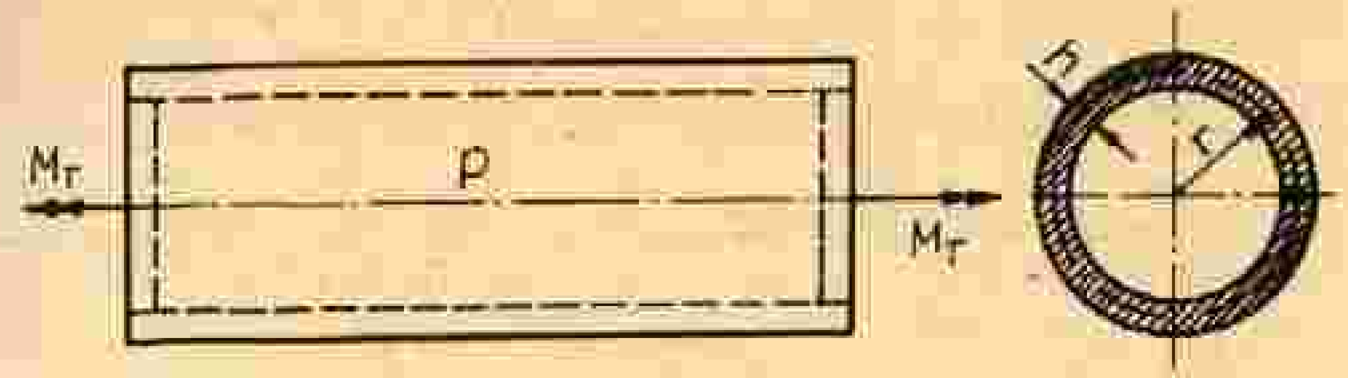
τ_{Tmax} tritt ebenfalls in den Punkten 1 und 2 auf.

3. Maximale Vergleichspannung nach der Gestaltänderungshypothese

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{Bmax}^2 + 3\,\tau_{Tmax}^2} = \sqrt{240{,}0^2 + 3 \cdot 101{,}0^2} =$$

$$= 297{,}0\ \text{N/mm}^2$$

$\boxed{7.12}$



$M_T = 10^8$ Nmm ; $r = 50$ cm $h = 5$ mm

$p = 1$ MPa

1. Schubspannung infolge Torsion

$$\tau = \frac{M_T}{2 A_m h} = \frac{M_T}{2 \cdot r^2 \pi h} = \frac{10^8\ \text{Nmm}}{2 \cdot 500^2\text{mm}^2\, \pi\, 5\,\text{mm}} =$$

$$= 12{,}73\ \text{N/mm}^2$$

2. Normalspannung in Längsrichtung

$$\sigma_z \simeq \frac{p\,r}{2h} = \frac{1\ \text{N/mm}^2\ 500\,\text{mm}}{2 \cdot 5\,\text{mm}} = 50{,}0\ \text{N/mm}^2$$

3. Normalspannung in Umfangsrichtung

$$\sigma_\varphi \simeq \frac{pr}{h} = \frac{1\,\text{N/mm}^2 \cdot 500\,\text{mm}}{5{,}0\ \text{mm}} = 100{,}0\ \text{N/mm}^2$$

4. Vergleichspannung nach der Gestaltänderungshypothese

$$\sigma_v = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[\sigma_\varphi^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + \sigma_z^2 + 6\,\tau_{\varphi z}^2\right]} =$$

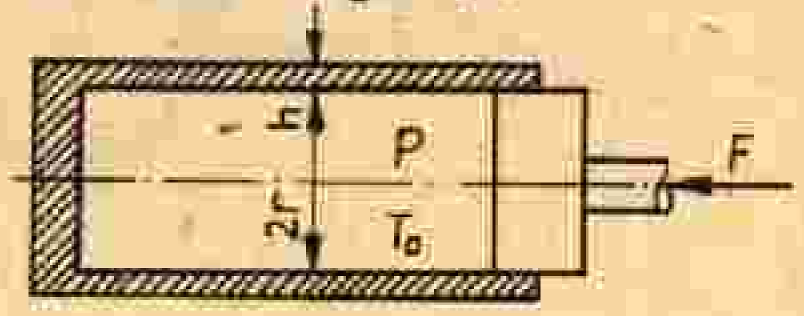
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[100{,}0^2 + (100{,}0 - 50{,}0)^2 + 50{,}0^2 + 6 \cdot 12{,}73^2\right]} =$$

$$= 89{,}4\ \text{N/mm}^2$$

$\boxed{7.13}$

1. Spannungen an Rohrinnenwand

1.1 Rohr ohne Längskraft



$h/r = 0{,}02$
$p = 1{,}5$ MPa
$\sigma_S = 255\ \mathrm{N/mm^2}$ bei 20°C
$\sigma_S = 206\ \mathrm{N/mm^2}$ bei 200°C

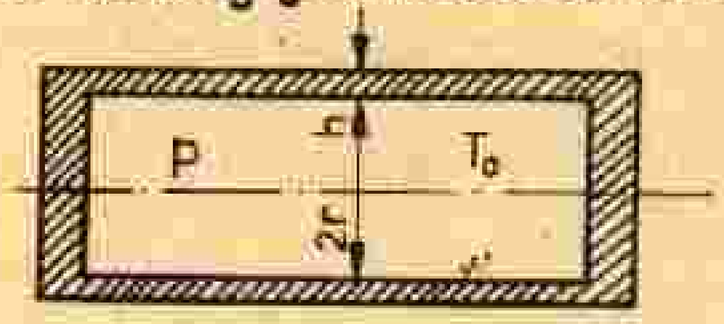
$T_0 = 20°$, $T_1 = 200°C$, $\alpha = 12{,}1 \cdot 10^{-6}/°C$
$E = 1{,}91 \cdot 10^5\ \mathrm{N/mm^2}$ bei 200°C, $\nu = 0{,}3$

$\sigma_r = -p = -1{,}5\ \mathrm{N/mm^2}$

$\sigma_\varphi = \frac{pr}{h} = \frac{1{,}5\ \mathrm{N/mm^2}}{0{,}02} = 75{,}0\ \mathrm{N/mm^2}$

$\sigma_z = 0$

1.2 Allseitig geschlossenes Rohr ($T = T_0$)

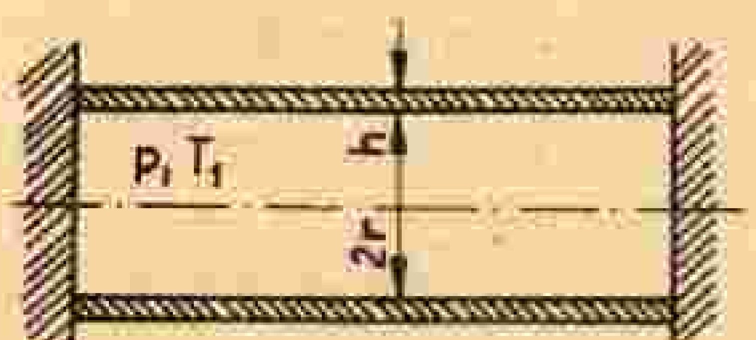


$\sigma_r = -p = -1{,}5\ \mathrm{N/mm^2}$

$\sigma_\varphi = \frac{pr}{h} = \frac{1{,}5\ \mathrm{N/mm^2}}{0{,}02} = 75{,}0\ \mathrm{N/mm^2}$

$\sigma_z = \frac{pr}{h} = \frac{1{,}5\ \mathrm{N/mm^2}}{2 \cdot 0{,}02} = 37{,}5\ \mathrm{N/mm^2}$

1.3 Eingespanntes Rohr nach Erwärmung auf $T = T_1$



$\sigma_r = -p = -1{,}5\ \mathrm{N/mm^2}$

$\sigma_\varphi = \frac{pr}{h} = \frac{1{,}5\ \mathrm{N/mm^2}}{0{,}02} = 75{,}0\ \mathrm{N/mm^2}$

$\boxed{7.13}$

Aus
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_\varphi - \nu\sigma_r) + \alpha\,(T_1 - T_0) = 0$$

folgt
$$\sigma_z = -E\alpha\,(T_1 - T_0) + \nu\,(\sigma_\varphi + \sigma_r) =$$
$$= -1{,}91 \cdot 10^5\ \mathrm{N/mm^2} \cdot 12{,}1 \cdot 180 +$$
$$0{,}3\,(75{,}0 - 1{,}5)\ \mathrm{N/mm^2} = -394{,}0\ \mathrm{N/mm^2}$$

2. Vergleichspannungen nach der Gestaltänderungshypothese

2.1 Fall 1:

Mit $\sigma_1 = \sigma_\varphi = 75{,}0\ \mathrm{N/mm^2}$, $\sigma_2 = \sigma_z = 0$,
$\sigma_3 = \sigma_r = -1{,}5\ \mathrm{N/mm^2}$

folgt
$$\sigma_v = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[75{,}0^2 + 1{,}5^2 + (-1{,}5 - 75{,}0)^2\right]} =$$
$$= 75{,}8\ \mathrm{N/mm^2}$$

2.2 Fall 2: $\sigma_1 = \sigma_\varphi = 75{,}0\ \mathrm{N/mm^2}$; $\sigma_2 = \sigma_z = 37{,}5\ \mathrm{N/mm^2}$
$\sigma_3 = \sigma_r = -1{,}5\ \mathrm{N/mm^2}$
$$\sigma_v = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[(75{,}0 - 37{,}5)^2 + (37{,}5 + 1{,}5)^2 + (-1{,}5 - 75{,}0)^2\right]}$$
$$= 66{,}3\ \mathrm{N/mm^2}$$

2.3 Fall 3: $\sigma_1 = \sigma_\varphi = 75{,}0\ \mathrm{N/mm^2}$; $\sigma_2 = \sigma_r = -1{,}5\ \mathrm{N/mm^2}$
$\sigma_3 = \sigma_z = -394{,}0\ \mathrm{N/mm^2}$
$$\sigma_v = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[(75{,}0 + 1{,}5)^2 + (-1{,}5 + 394{,}0)^2 + (-394{,}0 - 75{,}0)^2\right]}$$
$$= 435{,}8\ \mathrm{N/mm^2}$$

3. Sicherheiten gegen Erreichen der Streckgrenze

3.1 Fall 1:

$$S = \frac{\sigma_s}{\sigma_v} = \frac{355{,}0\ N/mm^2}{75{,}8\ N/mm^2} = 3{,}36$$

3.2 Fall 2:

$$S = \frac{355{,}0\ N/mm^2}{66{,}3\ N/mm^2} = 3{,}85$$

3.3 Fall 3:

$$S = \frac{\sigma_s\ (T=200)}{\sigma_v} = \frac{206{,}0\ N/mm^2}{435{,}8\ N/mm^2} = 0{,}47$$