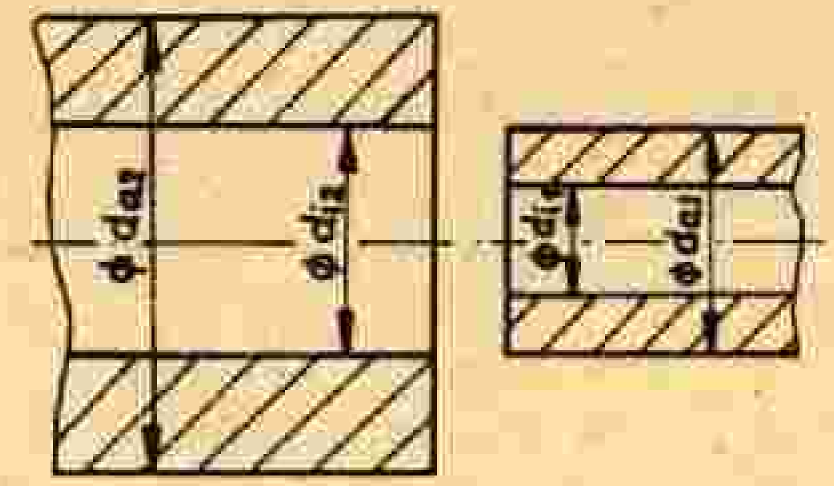
10.1



Geg.: $d_{a1} = 300{,}2\ \text{mm}$; $d_{a2} = 500\ \text{mm}$

$d_{i1} = 160\ \text{mm}$; $d_{i2} = 300\ \text{mm}$

$E_1 = E_2 = E = 2{,}1 \cdot 10^5\ \text{N mm}^{-2}$

$\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0{,}3$

Ges.: 1. Schrumpfdruck p_s

2. Verlauf von σ_r und σ_φ

<u>Lösung:</u>

$$\sigma_r^{(1)} = C_1^{(1)} - \frac{C_2^{(1)}}{r^2} \qquad \sigma_r^{(2)} = C_1^{(2)} - \frac{C_2^{(2)}}{r^2}$$

$$\sigma_\varphi^{(1)} = C_1^{(1)} - \frac{C_2^{(1)}}{r^2} \qquad \sigma_\varphi^{(2)} = C_1^{(2)} - \frac{C_2^{(2)}}{r^2}$$

$$u^{(1)} = \frac{r}{E}\left((1-\nu)C_1^{(1)} + (1+\nu)\frac{C_2^{(1)}}{r^2}\right) \qquad u^{2} = \frac{r}{E}\left((1-\nu)C_1^{(2)} + (1+\nu)\frac{C_2^{(2)}}{r^2}\right)$$

Rand- und Übergangsbedingungen

1. $\sigma_r^{(1)}(r_{1i}) = 0$
2. $\sigma_r^{(1)}(r_{1a}) = \sigma_r^{(2)}(r_{2i})$

10.1

3. $u^{(2)}(r_{2i}) - u^{(1)}(r_{1a}) = \Delta r \qquad \Delta r = \frac{1}{2}(d_{1a} - d_{2i}) = 0{,}1\ \text{mm}$
4. $\sigma_r^{(2)}(r_{2a}) = 0$

1. $C_1^{(1)} - \frac{C_2^{(1)}}{r_i^2} = 0$
2. $C_1^{(1)} - \frac{C_2^{(1)}}{r_m^2} = C_1^{(2)} - \frac{C_2^{(2)}}{r_m^2}$
3. $\frac{r}{E}\left\{(1-\nu)\left[C_1^{(2)} - C_1^{(1)}\right] + (1+\nu)\frac{\left[C_2^{(2)} - C_2^{(1)}\right]}{r_m^2}\right\} = \Delta r$
4. $C_1^{(2)} - \frac{C_2^{(2)}}{r_a^2} = 0$

Die Auflösung des Gleichungssystems ergibt

$$C_2^{(1)} = -\frac{E\Delta r}{2r_m}\,\frac{r_a^2 - r_m^2}{r_a^2 - r_i^2}\,r_i^2 \qquad C_1^{(1)} = -\frac{E\Delta r}{2r_m}\,\frac{r_a^2 - r_m^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$C_1^{(2)} = \frac{E\Delta r}{2r_m}\,\frac{r_m^2 - r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \qquad C_2^{(2)} = \frac{E\Delta r}{2r_m}\,\frac{r_m^2 - r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\,r_a^2$$

1. Schrumpfdruck p_s

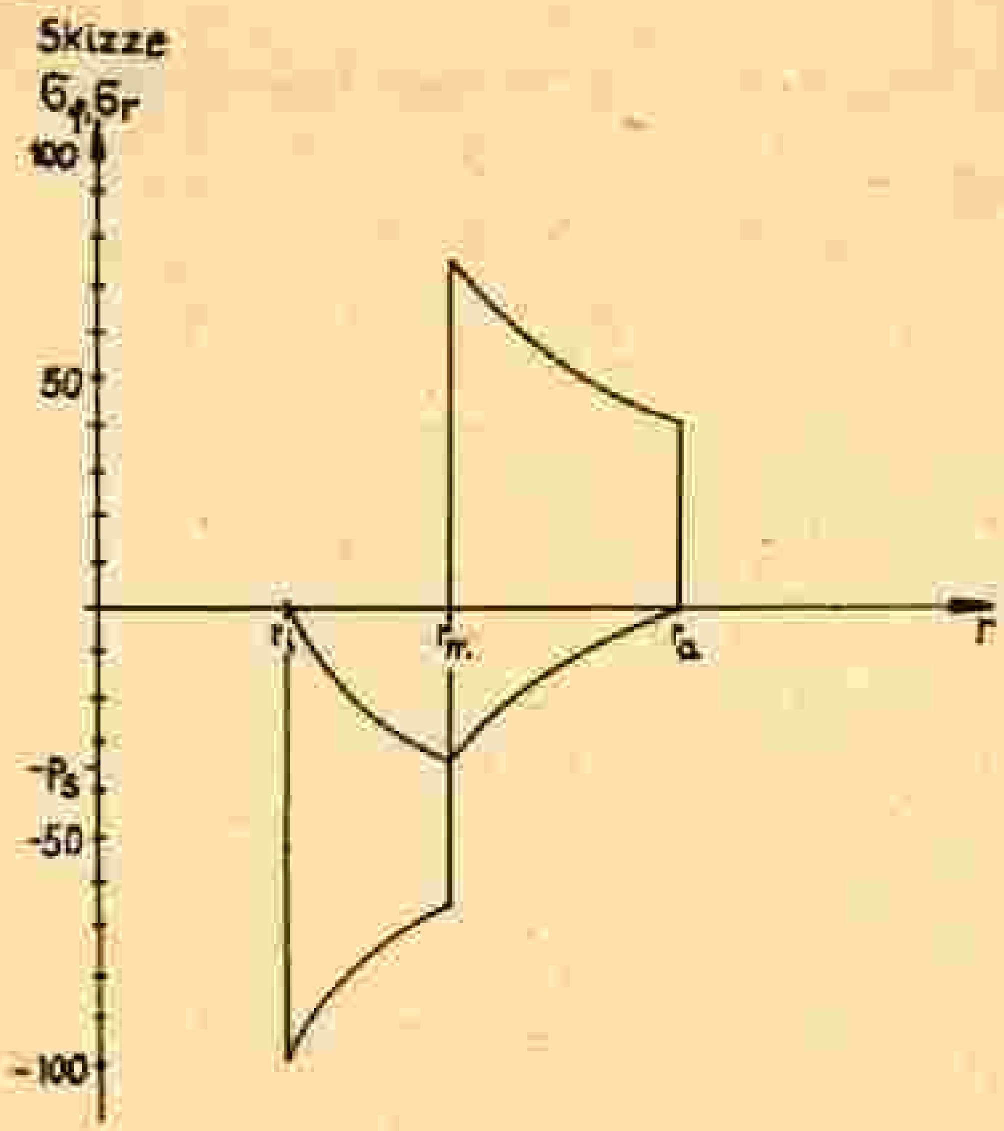
$$p_s = -\sigma_r(r_m)$$

$$\underline{p_s} = +\frac{E\Delta r}{2r_m}\,\frac{r_a^2 - r_m^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(1 - \frac{r_i^2}{r_m^2}\right) = \underline{\underline{35{,}7\ \text{N/mm}^2}}$$

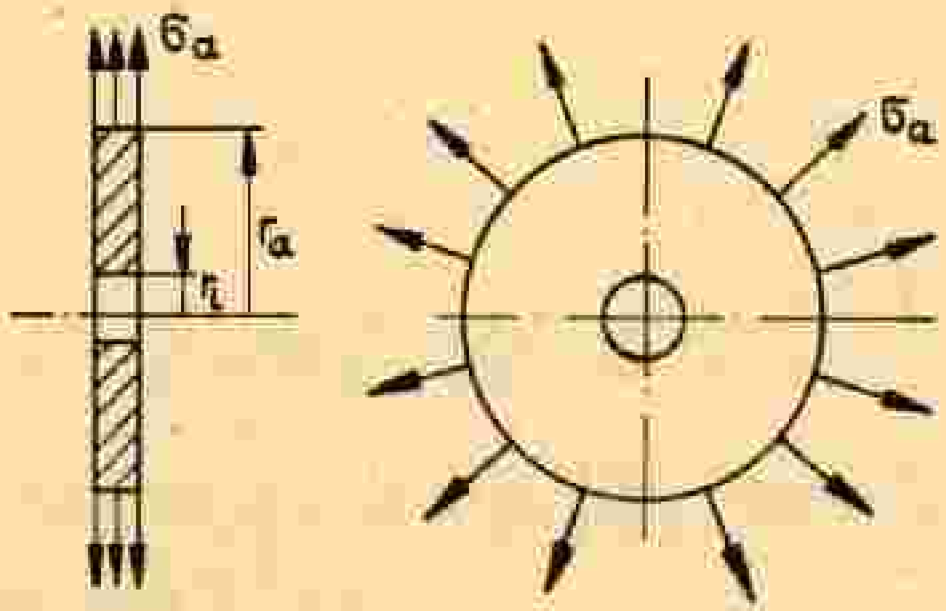
2. $\sigma_r^{(1)} = -\frac{E\Delta r}{2r_m}\,\frac{r_a^2 - r_m^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right) \qquad \sigma_\varphi^{(1)} = -\frac{E\Delta r}{2r_m}\,\frac{r_a^2 - r_m^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right)$

$$\sigma_r^{(2)} = +\frac{E\Delta r}{2r_m}\,\frac{r_m^2 - r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(1 - \frac{r_a^2}{r^2}\right) \qquad \sigma_\varphi^{(2)} = +\frac{E\Delta r}{2r_m}\,\frac{r_m^2 - r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(1 + \frac{r_a^2}{r^2}\right)$$

10.1



10.2



10.2

Geg.: r_i, r_a, σ_a

Ges.: 1. $\sigma_r(r)$, $\sigma_\varphi(r)$

speziell $\sigma_r(r_i)$; $\sigma_\varphi(r_i)$

2. Man diskutiere das Ergebnis unter der Annahme

$$\frac{r_i}{r_a} \Longrightarrow 0$$

Lösung:

1. $\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \qquad \sigma_\varphi = C_1 + \frac{C_2}{r^2}$

Randbedingungen: $\sigma_r(r_i) = 0$

$\sigma_r(r_a) = \sigma_a$

$$\sigma_a = C_1 - \frac{C_2}{r_a^2} \qquad 0 = C_1 - \frac{C_2}{r_i^2} \curvearrowright C_2 = \sigma_a \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}\, r_i^2$$

$$C_1 = \sigma_a \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$\sigma_r = \sigma_a \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_a \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right)$$

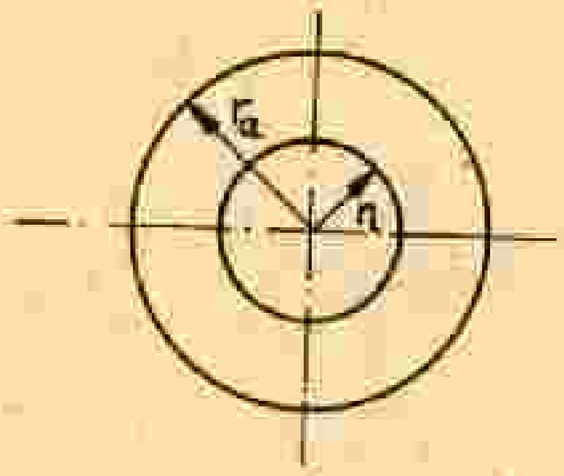
$$\underline{\underline{\sigma_r(r_i) = 0}} \qquad \underline{\underline{\sigma_\varphi(r_i) = 2\sigma_a \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} = \frac{2\sigma_a}{1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2}}}$$

10.2

2. Bei einer Ringscheibe, deren Innenradius sehr viel kleiner ist als der Außenradius, strebt $\sigma_\varphi(r_i)$ gegen $2\sigma_a$. Wenn kein Innenradius vorhanden ist, es sich also um eine Vollscheibe handelt, ist $\sigma_\varphi(r_i)$ gleich σ_a. (Keine gleichmäßige Konvergenz)

10.3

Homogene Kreisringscheibe konstanter Dicke, deren Innenradius um Δr aufgeweitet wird.



<u>Geg.:</u> $E, \nu, r_i, r_a, \Delta r$

Spezielle Werte:

$E = 2{,}1 \cdot 10^5\ \mathrm{N\,mm^{-2}}$

$\nu = 0{,}3$

$r_a = 3 r_i$; $\quad \Delta r = 0{,}001\, r_i$

<u>Ges.:</u> 1. $\sigma_r(r)$; $\sigma_\varphi(r)$ allgemein

2. Für die speziellen Werte mit grafischer Darstellung

2.1. $\sigma_r(r_i)$, $\sigma_\varphi(r_i)$

2.2. $\sigma_v(r_i)$ (Gestaltänderungsenergiehypothese)

<u>Lösung:</u>

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \qquad \sigma_\varphi = C_1 + \frac{C_2}{r^2}$$

10.3

Rand- und Übergangsbedingungen:

$$\sigma_r(r_i) = C_1 - \frac{C_2}{r_i^2} = -p \qquad \sigma_r(r_a) = C_1 - \frac{C_2}{r_a^2} = 0$$

$$\Delta r = \frac{r_i}{E}\left((1-\nu)C_1 + (1+\nu)\frac{C_2}{r_i^2}\right)$$

Lösung: $C_1 = p\,\dfrac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$

$$C_2 = p\,\frac{r_a^2\, r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$\Delta r = \frac{r_i}{E}\left[(1-\nu) + (1+\nu)\frac{r_a^2}{r_i^2}\right] p\,\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$p = \frac{\Delta r \cdot E}{r_i}\,\frac{r_a^2 - r_i^2}{(1-\nu)r_i^2 + (1+\nu)r_a^2}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{\Delta r E}{r_i}\,\frac{r_i^2}{(1-\nu)r_i^2 + (1+\nu)r_a^2} \qquad C_2 = \frac{\Delta r E}{r_i}\,\frac{r_i^2 \cdot r_a^2}{(1-\nu)r_i^2 + (1+\nu)r_a^2}$$

1. $$\sigma_r(r) = \frac{\Delta r E}{r_i}\,\frac{r_i^2}{(1+\nu)r_a^2 + (1-\nu)r_i^2}\left(1 - \frac{r_a^2}{r^2}\right)$$

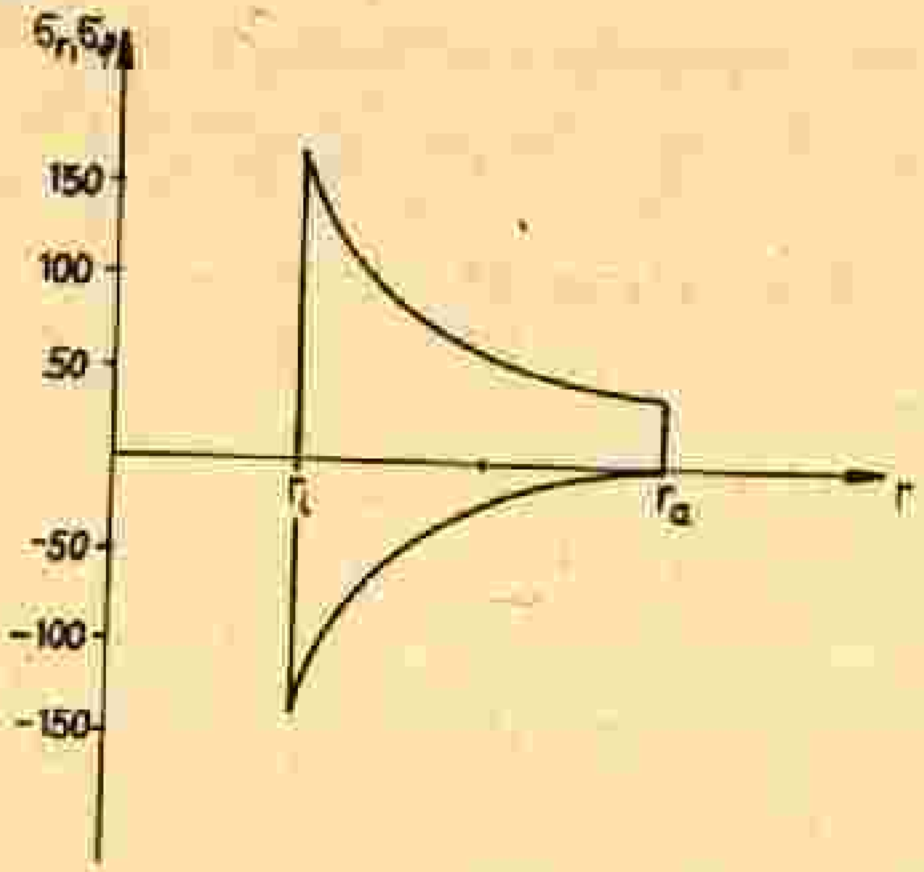
$$\sigma_\varphi(r) = \frac{\Delta r E}{r_i}\,\frac{r_i^2}{(1+\nu)r_a^2 + (1-\nu)r_i^2}\left(1 + \frac{r_a^2}{r^2}\right)$$

2.1. $$\underline{\sigma_r(r_i)} = \frac{\Delta r E}{r_i}\,\frac{r_i^2}{(1+\nu)r_a^2 + (1-\nu)r_i^2}\left(1 - \frac{r_a^2}{r_i^2}\right) = \underline{\underline{-135{,}48\ \mathrm{N/mm^2}}}$$

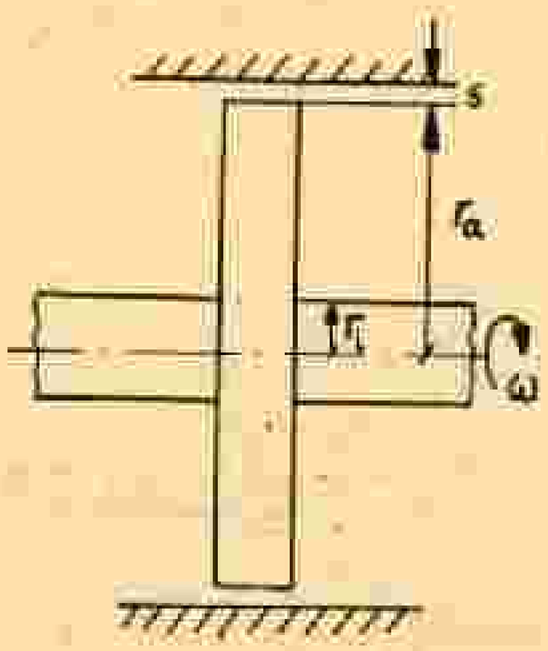
$$\underline{\sigma_\varphi(r_i)} = \frac{\Delta r E}{r_i}\,\frac{r_i^2}{(1+\nu)r_a^2 + (1-\nu)r_i^2}\left(1 + \frac{r_a^2}{r_i^2}\right) = \underline{\underline{169{,}35\ \mathrm{N/mm^2}}}$$

2.2. $$\underline{\sigma_v(r_i)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[(\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + \sigma_\varphi^2 + \sigma_r^2\right]} = \underline{\underline{264{,}5\ \mathrm{N/mm^2}}}$$

$\boxed{10.3}$



$\boxed{10.4}$



Geg.: $r_i = 50\,mm$

$r_a = 250\,mm$

$s = 0{,}1\,mm$

$E = 2{,}1 \cdot 10^5\, N/mm^2$

$\nu = 0{,}3$

$\varrho = 7{,}85\, kg/dm^3 = 7{,}85 \cdot 10^{-9} \frac{Ns^2}{mm^4}$

Ges. Drehzahl bei der die Scheibe am Gehäuse anläuft

a) Welle sei starr b) Vollscheibe

$\boxed{10.4}$

Lösung:

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\varrho\omega^2 r^2$$

$$\sigma_\varphi = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\varrho\omega^2 r^2$$

$$u = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)C_1 r - (1+\nu)\frac{C_2}{r} - \frac{(1-\nu^2)}{8}\varrho\omega^2 r^3\right]$$

Randbedingungen: (Fall b $\Rightarrow$ Fall a für $r_i = 0$)

1) $u(r = r_i) = 0$

2) $\sigma_r(r = r_a) = 0$

3) $u(r = r_a) = s$

1) $(1-\nu)C_1 r_i - (1+\nu)C_2 \frac{1}{r_i} - \frac{1-\nu^2}{8}\varrho\omega^2 r_i^3 = 0$

2) $C_1 + \frac{C_2}{r_a^2} - \frac{3+\nu}{8}\varrho\omega^2 r_a^2 = 0$

3) $(1-\nu)C_1 r_a - (1+\nu)C_2 \frac{1}{r_a} - \frac{1-\nu^2}{8}\varrho\omega^2 r_a^2 = 0$

Aus 1) und 3) folgt

$$C_2 = -\frac{E}{1+\nu}\cdot\frac{s}{r_a}\cdot\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{1-\nu}{8}\varrho\omega^2 r_a^2 r_i^2$$

und

$$C_1 = \frac{E}{1-\nu}\,\frac{s\, r_a}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{1+\nu}{8}\varrho\omega^2(r_a^2 + r_i^2)$$

C_1 und C_2 in 2) eingesetzt

$$\frac{E}{1-\nu}\,\frac{s\,r_a}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{1+\nu}{8}\varrho\omega^2(r_a^2 + r_i^2) + \frac{E}{1+\nu}\,\frac{s}{r_a}\,\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{1-\nu}{8}\varrho\omega^2 r_i^2 - \frac{3+\nu}{8}\varrho\omega^2 r_a^2 = 0$$

10.4

Nach ω^2 umgestellt

$$\omega^2 = \frac{4E}{\varrho(1-\nu^2)} \cdot \frac{s\, r_a}{(r_a^2-r_i^2)^2}\left[(1+\nu)+(1-\nu)\frac{r_i^2}{r_a^2}\right]$$

für $r_i = 0$ folgt

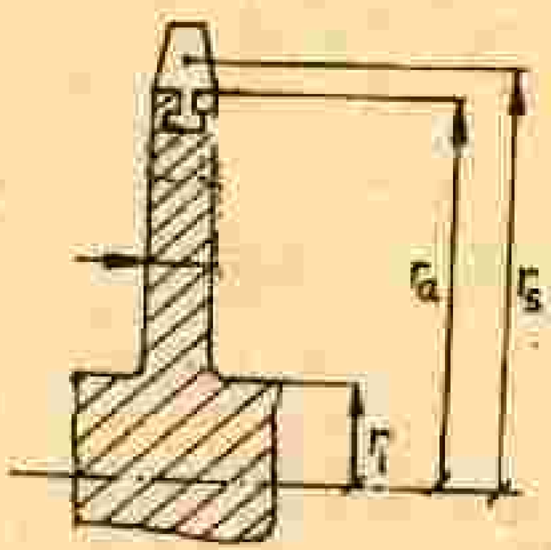
$$\omega^2 = \frac{4E}{\varrho(1-\nu)} \cdot \frac{s}{r_a^3}$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten $\left(n = \frac{30\omega}{\pi}\right)$

$r_i \neq 0$: $\underline{\omega = 1041{,}4\ s^{-1}}$; $\underline{n = 9944{,}3\ U/min}$

$r_i = 0$: $\underline{\omega = 989{,}1\ s^{-1}}$; $\underline{n = 9445{,}3\ U/min}$

10.5



Rotierende Turbinenscheibe mit z Schaufeln

Masse einer Schaufel $m_s = 100\ g$

Schaufelanzahl $z = 230$

Schaufelschwerpkt. $r_s = 425\ mm$

Drehzahl $n = 3000\ U/min$

$\varrho = 7{,}85\ kg/dm^3$

$E = 2{,}1 \cdot 10^5\ N/mm^2$, $\nu = 0{,}3$

$r_i = 70\ mm$, $r_a = 380\ mm$, $h = 20\ mm$

Ges.: σ_r, σ_φ und σ_v am Außen- und Innenrand der Scheibe

10.5

Lösung:

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\varrho\omega^2 r^2$$

$$\sigma_\varphi = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\varrho\omega^2 r^2$$

$$u = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)C_1 r - (1+\nu)\frac{C_2}{r} - \frac{(1-\nu^2)}{8}\varrho\omega^2 r^3\right]$$

Randbedingungen:

1. $\sigma_r(r = r_a) = \sigma_0$ (Bedingt durch Fliehkraft der Schaufeln)
2. $u(r = r_i) = 0$ (Näherung!)

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\pi n}{30} = 314{,}15\ s^{-1}$

Fliehkraft einer Schaufel $F_s = m_s\, r_s\, \omega^2$

$$= 0{,}1 \cdot 0{,}425 \cdot 314{,}15^2 = 4195\ N$$

Nennspannung am Außenrand $\sigma_0 = \frac{F_s \cdot z}{2\pi r_a h} = \frac{4195 \cdot 230}{2\pi \cdot 380 \cdot 20} = 20{,}2\ N/mm^2$

1) $C_1 + \frac{C_2}{r_a^2} - \frac{3+\nu}{8}\varrho\omega^2 r_a^2 = \sigma_0$

2) $\frac{1}{E}\left[(1-\nu)C_1 r_i - (1+\nu)\frac{C_2}{r_i} - \frac{(1-\nu^2)}{8}\varrho\omega^2 r_i^3\right] = 0$

1) nach C_1 aufgelöst und in 2) eingesetzt ergibt C_2:

$$C_2 = \frac{\sigma_0 + \frac{\varrho\omega^2}{8}\left[(3+\nu)r_a^2 - (1+\nu)r_i^2\right]}{r_i^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu}r_a^2}\ r_a^2 r_i^2$$

10.5

Zahlenwerte

$$C_2 = \frac{20{,}2 + \frac{7{,}85 \cdot 10^{-9} \cdot 314{,}15^2}{8}\left[3{,}3 \cdot 380^2 - 1{,}3 \cdot 70^2\right]}{70^2 + \frac{1{,}3}{0{,}7} \cdot 380^2} \cdot 380^2 \cdot 70^2$$

$$\underline{C_2 = 1{,}7031 \cdot 10^5\ N}$$

Aus 1. folgt C_1:

$$C_1 = \sigma_a + \frac{3+\nu}{8}\,\varrho\,\omega^2 r_a^2 - \frac{C_2}{r_a^2}$$

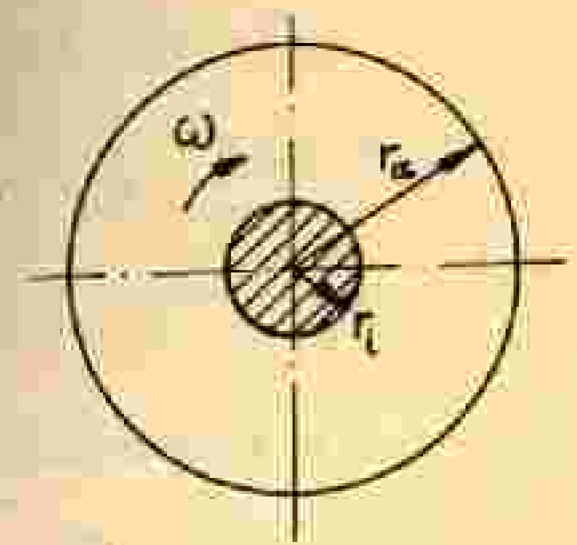
$$C_1 = 20{,}2 + \frac{3{,}3}{8}\,7{,}85 \cdot 10^{-9} \cdot 314{,}15^2 \cdot 380^2 - \frac{1{,}7031 \cdot 10^5}{380^2}$$

$$\underline{\underline{C_1 = 65{,}17\ N/mm^2}}$$

Mit den berechneten Konstanten und $\sigma_v = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \cdot \sigma_\varphi}$ folgt

r [mm]	σ_r [N/mm²]	σ_φ [N/mm²]	σ_v [N/mm²]
380	20,2	37,5	32,5
70	98,4	29,5	87,5

10.6



Rotierende Scheibe konst. Dicke auf Vollwelle aufgeschrumpft

$r_a = 300\,mm$, $r_i = 100\,mm$

$\Delta r = 0{,}1\,mm$, $E = 4{,}5 \cdot 10^4\ N/mm^2$

$\nu = 0{,}3$, $\varrho = 1{,}8\ kg/dm^3$

Ges.: Winkelgeschwindigkeit ω bei der sich die Scheibe zu lösen beginnt

Lösung: a) Scheibe

$$\sigma_{rs} = C_{1s} + \frac{C_{2s}}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\,\varrho\,\omega^2 r^2$$

$$\sigma_{\varphi s} = C_{1s} - \frac{C_{2s}}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\,\varrho\,\omega^2 r^2$$

$$u_s = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)\,C_{1s} \cdot r - (1+\nu)\frac{C_{2s}}{r} - \frac{(1-\nu^2)}{8}\,\varrho\,\omega^2 r^3\right]$$

b) Welle ($C_{2w} = 0$, da Vollwelle)

$$\sigma_{rw} = C_{1w} - \frac{3+\nu}{8}\,\varrho\,\omega^2 r^2$$

$$\sigma_{\varphi w} = C_{1w} - \frac{1+3\nu}{8}\,\varrho\,\omega^2 r^2$$

$$u_w = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)\,C_{1w} \cdot r - \frac{(1-\nu^2)}{8}\,\varrho\,\omega^2 r^3\right]$$

10.6

Randbedingungen:

1) $\sigma_{rs}\,(r=r_a)=0$

2) $\sigma_{rs}\,(r=r_i)=\sigma_{rw}\,(r=r_i)$

3) $u_s\,(r=r_i)-u_w\,(r=r_i)=\Delta r$

4) $\sigma_{rw}\,(r=r_i)=0$ Grenzfall wenn sich Scheibe löst!

1) $C_{1s}+\frac{C_{2s}}{r_a^2}-\frac{3+\nu}{8}\varrho\,\omega^2 r_a^2=0$

2) $C_{1s}+\frac{C_{2s}}{r_i^2}-\frac{3+\nu}{8}\varrho\,\omega^2 r_i^2=0$

4) $C_{1w}-\frac{3+\nu}{8}\varrho\,\omega^2 r_i^2=0$

3) $$\frac{1}{E}\left[(1-\nu)C_{1s}r_i-(1+\nu)\frac{C_{2s}}{r_i}-\frac{(1-\nu^2)}{8}\varrho\,\omega^2 r_i^3\right]-\frac{1}{E}\left[(1-\nu)C_{1w}r_i-\frac{(1-\nu^2)}{8}\varrho\,\omega^2 r_i^3\right]=\Delta r$$

Aus 1) und 2) folgt

$$C_{1s}=\frac{3+\nu}{8}\varrho\,\omega^2(r_a^2+r_i^2)$$

$$C_{2s}=-\frac{3+\nu}{8}\varrho\,\omega^2 r_a^2 r_i^2$$

Aus 4)

$$C_{1w}=+\frac{3+\nu}{8}\varrho\,\omega^2 r_i^2$$

10.6

In 3. eingesetzt

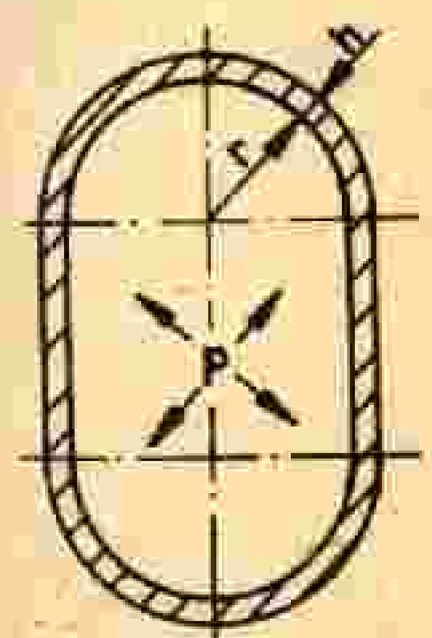
$$(1-\nu)\cdot\frac{3+\nu}{8}\varrho\,\omega^2(r_a^2+r_i^2)+(1+\nu)\frac{3+\nu}{8}\varrho\,\omega^2 r_a^2-(1-\nu)\frac{3+\nu}{8}\varrho\,\omega^2 r_i^2=\frac{\Delta r}{r_i}E$$

$$\omega^2=\frac{4\,\Delta r\,E}{(3+\nu)\,r_i\,r_a^2\,\varrho}$$

Zahlenwerte

$$\omega=580{,}3\,s^{-1}$$

10.7



Geg.: $r=200\,mm$
$h=1\,mm$
$p=0{,}6\,N/mm^2$

Ges.: 1. Spannungen σ_φ und σ_ϑ längs eines Meridians (mit graphischer Darstellung)
2. Diskussion der Ergebnisse

Lösung:

1) $$\frac{\sigma_\vartheta}{\varrho_1}+\frac{\sigma_\varphi}{\varrho_2}=\frac{p}{h}\quad\text{(Kesselformel)}$$

daraus folgt $\sigma_\varphi=\left(\frac{p}{h}-\frac{\sigma_\vartheta}{\varrho_1}\right)\varrho_2$

$$\sigma_\vartheta=\frac{p\,r}{2h\cdot\sin\vartheta}\quad\text{(Gleichgewicht in axialer Richtung)}$$

10.7

$\varrho_2 = \frac{r}{\sin\vartheta}$ $\sigma_\vartheta = \frac{p\,\varrho_2}{2h}$

aus Einsetzen in Kesselformel folgt

$$\sigma_\varphi = \frac{p}{h}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)\varrho_2$$

für Kugelkessel gilt $\varrho_1 = r$ $\varrho_2 = r$

daraus folgt $\underline{\underline{\sigma_\vartheta = \frac{p \cdot r}{2 \cdot h}}}$ $\underline{\underline{\sigma_\varphi = \frac{p \cdot r}{2\,h}}}$

Einsetzen der gegebenen Größen

$\sigma_\vartheta = \frac{0{,}6\,N/mm^2 \cdot 200\,mm}{2 \cdot 1\,mm}$ $\underline{\underline{\sigma_\vartheta = 60\,N/mm^2}}$

$\sigma_\varphi = \frac{0{,}6\,N/mm^2 \cdot 200\,mm}{2 \cdot 1\,mm}$ $\underline{\underline{\sigma_\varphi = 60\,N/mm^2}}$

für Zylinderkessel gilt $\varrho_1 = \infty$ $\varrho_2 = r$

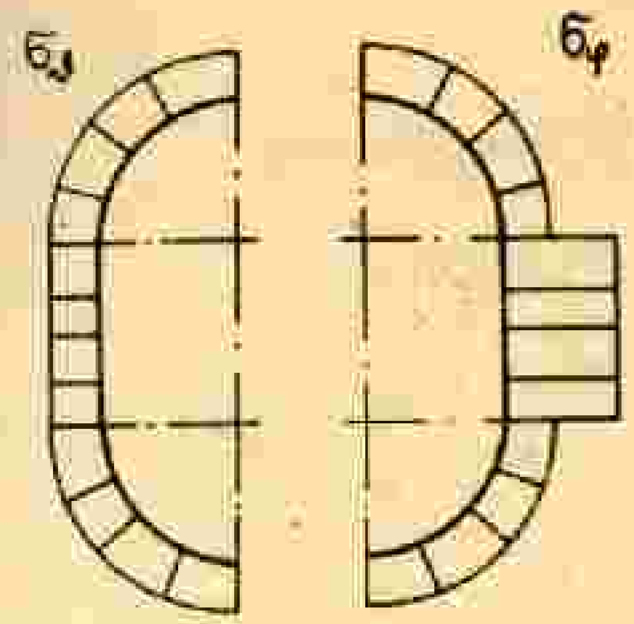
daraus folgt $\underline{\underline{\sigma_\vartheta = \frac{p \cdot r}{2 \cdot h}}}$ $\underline{\underline{\sigma_\varphi = \frac{p \cdot r}{h}}}$

Einsetzen der gegebenen Größen

$\sigma_\vartheta = \frac{0{,}6\,N/mm^2 \cdot 200\,mm}{2 \cdot 1\,mm}$ $\underline{\underline{\sigma_\vartheta = 60\,N/mm^2}}$

$\sigma_\varphi = \frac{0{,}6\,N/mm^2 \cdot 200\,mm}{1\,mm}$ $\underline{\underline{\sigma_\varphi = 120\,N/mm^2}}$

10.7

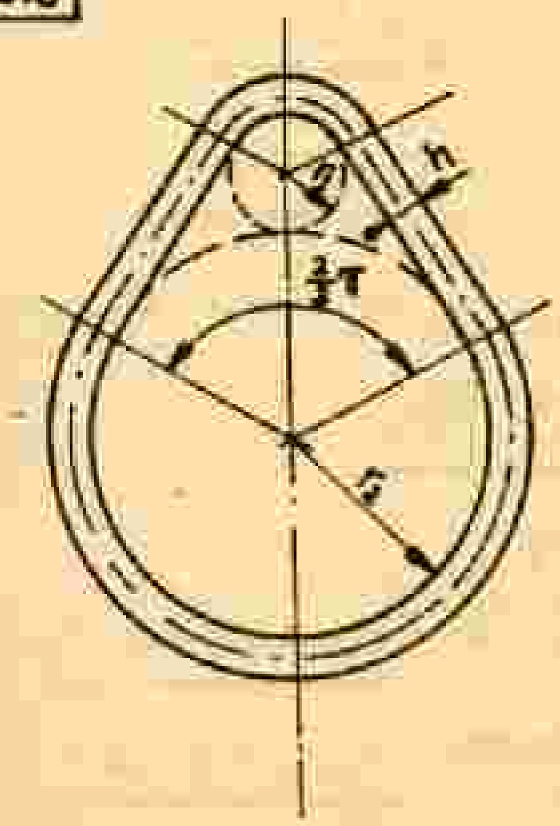


$1\,mm \mathrel{\hat{=}} 10\,N/mm^2$

2. Diskussion der Ergebnisse

Die sprunghafte Änderung der Ringspannung am Übergang Kegel-Zylinder führt zu unterschiedlichen Ringdehnungen. Die Übereinstimmung der radialen Verschiebungen an dieser Stelle muß durch zusätzliche Biegespannungen hergestellt werden.

10.8



Geg.: $r_1 = 500\,mm$
$h = 10\,mm$
$r_2 = 1500\,mm$
$p = 1\,N/mm^2$

Ges.: 1. Verlauf der Spannungen σ_φ und σ_ϑ längs eines Meridians (mit graphischer Darstellung)

2. Diskussion der Ergebnisse

$\boxed{10.8}$

Lösung:

1) $\frac{\sigma_\vartheta}{\rho_1} + \frac{\sigma_\varphi}{\rho_2} = \frac{p}{h}$ (Kesselformel)

daraus folgt $\sigma_\varphi = \left(\frac{p}{h} - \frac{\sigma_\vartheta}{\rho_1}\right)\rho_2$

$\sigma_\vartheta = \frac{pr}{2h\sin\vartheta}$ (Gleichgewicht in axialer Richtung)

$\rho_2 = \frac{r}{\sin\vartheta} \quad \sigma_\vartheta = \frac{p\rho_2}{2h}$

aus Einsetzen in Kesselformel folgt

$$\sigma_\varphi = \frac{p}{h}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\rho_2$$

für kleinen Kugelkessel gilt $\rho_1 = r_1 \quad \rho_2 = r_1$

daraus folgt $\underline{\sigma_\vartheta = \frac{p \cdot r_1}{2 \cdot h}} \quad \underline{\sigma_\varphi = \frac{p \cdot r_1}{2 \cdot h}}$

Einsetzen der gegebenen Größen

$\sigma_\vartheta = \frac{1 N/mm^2 \cdot 500 mm}{2 \cdot 10 mm} \quad \underline{\sigma_\vartheta = 25 N/mm^2}$

$\sigma_\varphi = \frac{1 N/mm^2 \cdot 500 mm}{2 \cdot 10 mm} \quad \underline{\sigma_\varphi = 25 N/mm^2}$

für großen Kugelkessel gilt $\rho_1 = r_2 \quad \rho_2 = r_2$

daraus folgt $\underline{\sigma_\vartheta = \frac{p r_2}{2h}} \quad \underline{\sigma_\varphi = \frac{p r_2}{2h}}$

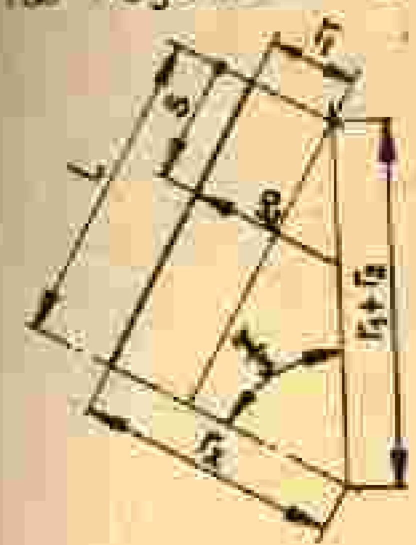
Einsetzen der gegebenen Größen

$\sigma_\vartheta = \frac{1 N/mm^2 \cdot 1500 mm}{2 \cdot 10 mm} \quad \underline{\sigma_\vartheta = 75 N/mm^2}$

$\sigma_\varphi = \frac{1 N/mm^2 \cdot 1500 mm}{2 \cdot 10 mm} \quad \underline{\sigma_\varphi = 75 N/mm^2}$

$\boxed{10.8}$

für Kegelkessel gilt



$\rho_2 = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{L} s \qquad \rho_1 = \infty$

$L = (r_1 + r_2)\sin\frac{\pi}{3}$

$L = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(r_1 + r_2)$

$\rho_2 = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}\frac{2}{\sqrt{3}} s$

daraus folgt $\underline{\sigma_\vartheta = \frac{p}{2h}\left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}\frac{2}{\sqrt{3}} s\right)}$; $\underline{\sigma_\varphi = \frac{p}{h}\left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}\frac{2}{\sqrt{3}} s\right)}$

für $s = 0$ gilt $\sigma_\vartheta = \frac{p r_1}{2h} \qquad \sigma_\varphi = \frac{p r_1}{h}$

Einsetzen der gegebenen Größen

$\sigma_\vartheta = \frac{1 N/mm^2 \cdot 500}{2 \cdot 10 mm} \qquad \underline{\sigma_\vartheta = 25 Nmm^2}$

$\sigma_\varphi = \frac{1 N/mm^2 \cdot 500 mm}{10 mm} \qquad \underline{\sigma_\varphi = 50 N/mm^2}$

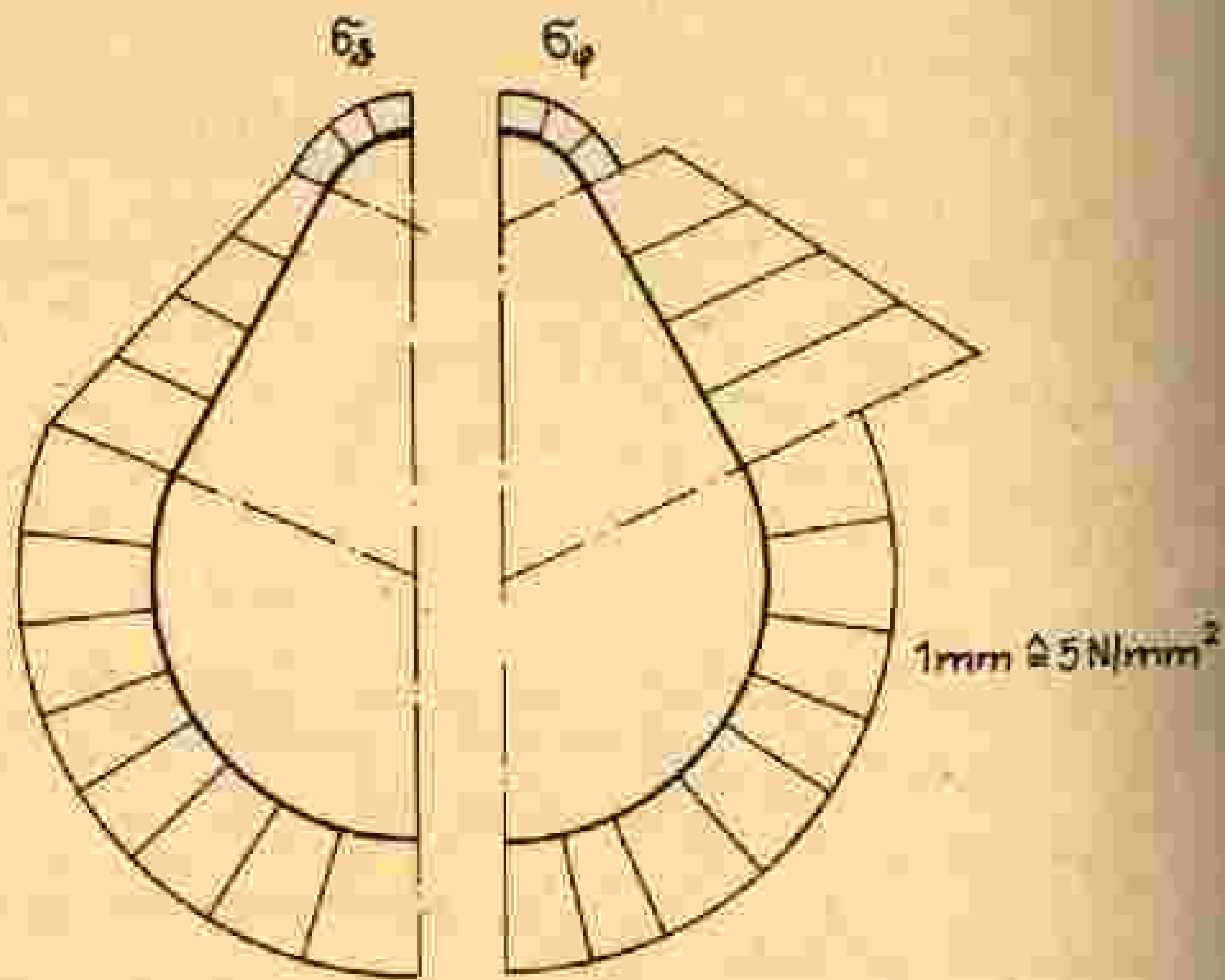
für $s = L$ gilt $\sigma_\vartheta = \frac{p \cdot r_2}{2h} \qquad \sigma_\varphi = \frac{p r_2}{h}$

Einsetzen der gegebenen Größen

$\sigma_\vartheta = \frac{1 N/mm^2 \cdot 1500 mm}{2 \cdot 10 mm} \qquad \underline{\sigma_\vartheta = 75 N/mm^2}$

$\sigma_\varphi = \frac{1 N/mm^2 \cdot 1500 mm}{10 mm} \qquad \underline{\sigma_\varphi = 150 N/mm^2}$

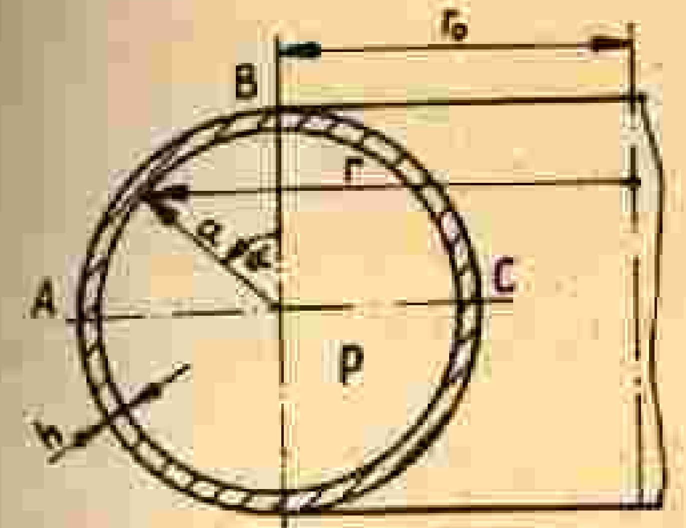
$\boxed{10.8}$



2) Die sprunghafte Änderung der Ringspannung am Übergang Kugel-Kegel führt zu unterschiedlichen Ringdehnungen.

Die Übereinstimmung der radialen Verschiebungen an dieser Stelle muß durch zusätzliche Biege-Spannungen hergestellt werden.

$\boxed{10.9}$



Geg.: $r_0 = 500\,mm$

$a = 250\,mm$

$h = 10\,mm$

$p = 2\,N/mm^2$

Ges.: 1. $\sigma(\alpha)$ und $\sigma_\varphi(\alpha)$

2. Diskussion der Ergebnisse

Lösung:

1) $$\frac{\sigma_\vartheta}{\varrho_1} + \frac{\sigma_\varphi}{\varrho_2} = \frac{p}{h} \quad \text{(Kesselformel)}$$

daraus folgt
$$\sigma_\varphi = \left(\frac{p}{h} - \frac{\sigma_\vartheta}{\varrho_1}\right)\varrho_2$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{p\cdot(r^2 - r_0^2)}{2\cdot h\cdot r\cdot \sin\alpha} \quad \text{(Gleichgewicht in axialer Richtung)}$$

aus Einsetzen in Kesselformel folgt
$$\sigma_\varphi = \frac{p}{h}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{r^2 - r_0^2}{\varrho_1 r \sin\alpha}\right)\varrho_2$$

für Ringkessel gilt $\varrho_2 = \frac{r}{\sin\alpha}$ $\quad r = r_0 + a\sin\alpha$ $\quad \varrho_1 = a$

daraus folgt $\underline{\underline{\sigma_\vartheta = \frac{pa}{2h}\,\frac{2r_0 + a\sin\alpha}{r_0 + a\sin\alpha}}}$ $\quad \underline{\underline{\sigma_\varphi = \frac{pa}{2h}}}$

2) A: für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gilt $\sigma_\vartheta = \frac{p\cdot a}{2\cdot h}\,\frac{2r_0 + a}{r_0 + a}$ $\quad \sigma_\varphi = \frac{pa}{2h}$

10.9

Einsetzen der gegebenen Größen

$$\sigma_\vartheta = \frac{2\,N/mm^2 \cdot 250\,mm}{2 \cdot 10\,mm} \cdot \frac{2 \cdot 500\,mm + 250\,mm}{500\,mm + 250\,mm} \qquad \underline{\sigma_\vartheta = 41{,}6\,N/mm^2}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2\,N/mm^2 \cdot 250\,mm}{2 \cdot 10\,mm} \qquad \underline{\sigma_\varphi = 25\,N/mm^2}$$

B: für $\alpha = 0$ gilt $\sigma_\vartheta = \frac{pa}{h}$ $\quad \sigma_\varphi = \frac{pa}{2h}$

Einsetzen der gegebenen Größen

$$\sigma_\vartheta = \frac{2\,N/mm^2 \cdot 250\,mm}{10\,mm} \qquad \underline{\sigma_\vartheta = 50\,N/mm^2}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2\,N/mm^2 \cdot 250\,mm}{2 \cdot 10\,mm} \qquad \underline{\sigma_\varphi = 25\,N/mm^2}$$

C: für $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ gilt $\sigma_\vartheta = \frac{pa}{2h} \cdot \frac{2r_0 - a}{r_0 - a}$ $\quad \sigma_\varphi = \frac{pa}{2h}$

Einsetzen der gegebenen Größen

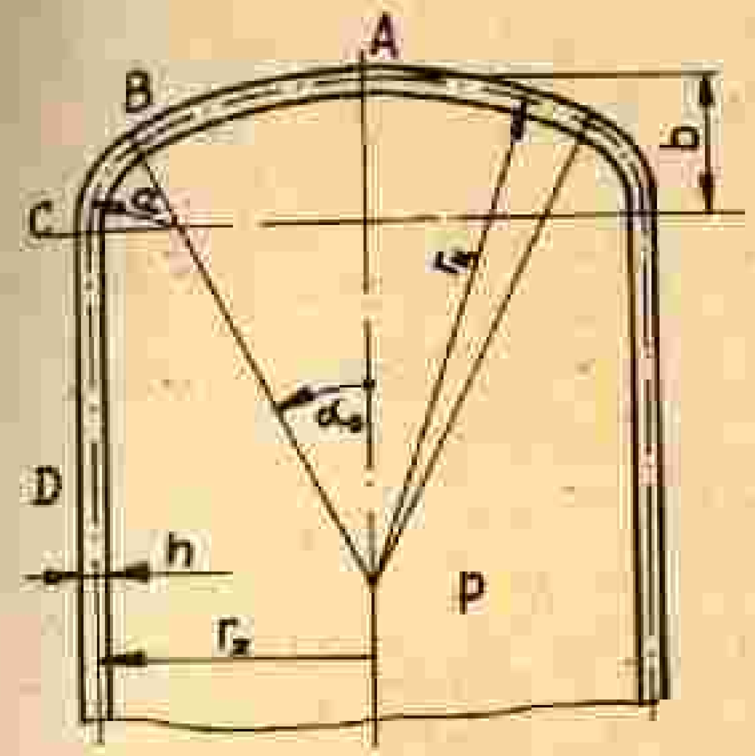
$$\sigma_\vartheta = \frac{2\,N/mm^2 \cdot 250\,mm}{2 \cdot 10\,mm} \cdot \frac{2 \cdot 500\,mm - 250\,mm}{500\,mm - 250\,mm}$$

$$\underline{\sigma_\vartheta = 75\,N/mm^2}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2\,N/mm^2 \cdot 250\,mm}{2 \cdot 10\,mm}$$

$$\underline{\sigma_\varphi = 25\,N/mm^2}$$

10.10



Geg.: $p = 1\,N/mm^2$
$h = 10\,mm$
$r_z = 500\,mm$
$a = 150\,mm$
$r_k = 800\,mm$

Ges.: 1. α_0, b
2. Verlauf von σ_ϑ und σ_φ entlang der Meridianlinie
3. σ_ϑ und σ_φ an den Stellen A, B, C und D
4. Man diskutiere das Ergebnis

Lösung:

1) $\quad \sin\alpha_0 = \frac{r_z - a}{r_k - a} \qquad b = r_k - \sqrt{(r_k - a)^2 - (r_z - a)^2}$

daraus folgt $\alpha_0 = \arcsin \frac{r_z - a}{r_k - a}$

Einsetzen der gegebenen Größen

$$\alpha_0 = \arcsin \frac{500\,mm - 150\,mm}{800\,mm - 150\,mm} \qquad \underline{\alpha_0 = 32{,}6^\circ}$$

$$b = 800\,mm - \sqrt{(800\,mm - 150\,mm)^2 - (500\,mm - 150\,mm)^2}$$

$$\underline{b = 252\,mm}$$

$\boxed{10.10}$

2) $\frac{\sigma_\vartheta}{\varrho_1} + \frac{\sigma_\varphi}{\varrho_2} = \frac{p}{h}$ (Kesselformel)

daraus folgt $\sigma_\varphi = \left(\frac{p}{h} - \frac{\sigma_\vartheta}{\varrho_1}\right)\varrho_2$

$\sigma_\vartheta = \frac{pr}{2h\sin\vartheta}$ (Gleichgewicht in axialer Richtung)

$\varrho_2 = \frac{r}{\sin\vartheta}$ $\quad \sigma_\vartheta = \frac{p\varrho_2}{2h}$

aus Einsetzen in Kesselformel folgt

$$\sigma_\varphi = \frac{p}{h}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)\varrho_2$$

für Kugelkessel gilt $\varrho_1 = r_K \quad \varrho_2 = r_K$

daraus folgt $\underline{\underline{\sigma_\vartheta = \frac{pr_K}{2h}}} \quad \underline{\underline{\sigma_\varphi = \frac{pr_K}{2h}}}$

für Zylinderkessel gilt $\varrho_1 = \infty \quad \varrho_2 = r_z$

daraus folgt $\underline{\underline{\sigma_\vartheta = \frac{pr_z}{2h}}} \quad \underline{\underline{\sigma_\varphi = \frac{pr_z}{h}}}$

für Ringkessel gilt $\varrho_1 = a \quad \varrho_2 \frac{r_z - a(1-\sin\vartheta)}{\sin\vartheta}$

daraus folgt

$$\underline{\underline{\sigma_\vartheta = \frac{p}{2h}\,\frac{r_z - a(1-\sin\vartheta)}{\sin\vartheta}}} \quad \underline{\underline{\sigma_\varphi = \frac{p}{h}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r_z - a(1-\sin\vartheta)}{a\cdot\sin\vartheta}\right)\frac{r_z - a(1-\sin\vartheta)}{\sin\vartheta}}}$$

3) A: $\sigma_\vartheta = \frac{pr_K}{2h} \qquad \sigma_\varphi = \frac{pr_K}{2h}$

$\boxed{10.10}$

Einsetzen der gegebenen Größen

$\sigma_\vartheta = \frac{1\,N/mm^2 \cdot 800\,mm}{2 \cdot 10\,mm} \qquad \underline{\underline{\sigma_\vartheta = 40\,N/mm^2}}$

$\sigma_\varphi = \frac{1\,N/mm^2 \cdot 800\,mm}{2 \cdot 10\,mm} \qquad \underline{\underline{\sigma_\varphi = 40\,N/mm^2}}$

B:

$\sigma_\vartheta = \frac{p}{2h}\,\frac{r_z - a(1-\sin\vartheta)}{\sin\vartheta} \qquad \sigma_\varphi = \frac{p}{h}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r_z - a(1-\sin\vartheta)}{a\sin\vartheta}\right)\frac{r_z - a(1-\sin\vartheta)}{\sin\vartheta}$

Einsetzen der gegebenen Größen für $\vartheta = \alpha_0$

$\sigma_\vartheta = \frac{1\,N/mm^2}{2\cdot 10\,mm}\cdot\frac{500\,mm - 150\,mm(1-\sin 32{,}6°)}{\sin 32{,}6} \qquad \sigma_\vartheta = 40\,N/mm^2$

$\sigma_\varphi = \frac{1\,N/mm^2}{10\,mm}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{500\,mm - 150\,mm(1-\sin 32{,}6°)}{150\,mm\,\sin 32{,}6°}\right)\frac{500\,mm - 150\,mm(1-\sin 32{,}6°)}{\sin 32{,}6°}$

$\underline{\underline{\sigma_\varphi = -133{,}3\,N/mm^2}}$

C:

$\sigma_\vartheta = \frac{p}{2h}\,\frac{r_z - a(1-\sin\vartheta)}{\sin\vartheta} \qquad \sigma_\varphi = \frac{p}{h}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r_z - a(1-\sin\vartheta)}{a\sin\vartheta}\right)\frac{r_z - a(1-\sin\vartheta)}{\sin\vartheta}$

Einsetzen der gegebenen Größen für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

$\sigma_\vartheta = \frac{1\,N/mm^2 \cdot 500\,mm}{2 \cdot 10\,mm} \qquad \underline{\underline{\sigma_\vartheta = 25\,N/mm^2}}$

$\sigma_\varphi = \frac{1\,N/mm^2 \cdot 500\,mm}{10\,mm}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{500\,mm}{150\,mm}\right) \qquad \underline{\underline{\sigma_\varphi = -33{,}3\,N/mm^2}}$

D: $\sigma_\vartheta = \frac{p\,r_z}{2\,h} \qquad \sigma_\varphi = \frac{pr_z}{h}$

10.10

Einsetzen der gegebenen Größen

$$\sigma_\vartheta = \frac{1\,N/mm^2 \cdot 500\,mm}{2 \cdot 10\,mm} \qquad \underline{\underline{\sigma_\vartheta = 25\,N/mm^2}}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1\,N/mm^2 \cdot 500}{10\,mm} \qquad \underline{\underline{\sigma_\varphi = 50\,N/mm^2}}$$

4) a) Die sprunghafte Änderung der Ringspannungen führt zu zusätzlichen Biegespannungen.

b) Die Druckspannungen im Übergangsbogen können bei dünnwändigen Schalen zu einer Faltenbildung (Instabilität) führen.